# Rayonnement X dans les accélérateurs de particules

## 1 Rappels et calculs préliminaires

1) Dans tous ces appareils, la seule force en jeu est la force de Lorentz qui est toujours perpendiculaire à la vitesse. L'accélération est donc perpendiculaire.
2) Même expression que celle rappelée en remplaçant $\cos^2\Phi$ par sa moyenne, c'est à dire par $1/2$.
3) On voit dans l'expression de la distribution angulaire que le facteur Doppler du dénominateur peut s'annuler en $\Theta = 0$ lorsque $\beta \approx 1$. La puissance est donc beaucoup plus intense dans l'axe de la vitesse, si bien qu'on peut négliger ce qu'il se passe loin de l'axe. Seuls les angles $\Theta << 1$ nous intéressent donc.
4) Par définition : $\gamma^2 = 1/(1-\beta^2)$, donc $\beta = (1-1/\gamma^2)^{1/2} \approx 1 - 1/(2\gamma^2)$ où la dernière étape est un DL pour $\gamma >> 1$.
5) $1 - \beta\cos\Theta = 1 - (1 - 1/(2\gamma^2))(1-\Theta^2/2)) \approx 1/(2\gamma^2) + \Theta^2/2 = (1+\gamma^2\Theta^2)/(2\gamma^2)$.
6) Il n'y a qu'à remplacer...
7) Il s'agit d'une distribution piquée en $\Theta = 0$.
8)

$$\begin{aligned}
\sigma_\Theta^2 &= (1/P)\int \Theta^2(\partial P/\partial\Omega)d\Omega \\
&= \int_0^\pi \Theta^2 \frac{3\gamma^2}{\pi}\frac{1+\gamma^4\Theta^4}{(1+\gamma^2\Theta^2)^5}2\pi\sin\Theta d\Theta \\
&= \frac{3}{\gamma^2}\int(\gamma^2\Theta^2)\frac{1+\gamma^4\Theta^4}{(1+\gamma^2\Theta^2)^5}d(\gamma^2\Theta^2) \\
&= \frac{3}{\gamma^2}\int_1^{1+\pi^2\gamma^2}(u-1)\frac{1+(u-1)^2}{u^5}du \\
&= \frac{3}{\gamma^2}\int_1^\infty\left(\frac{1}{u^2}-\frac{3}{u^3}+\frac{4}{u^4}-\frac{2}{u^5}\right)du \\
&= \frac{3}{\gamma^2}\left[\frac{-1}{u}+\frac{3}{2u^2}-\frac{4}{3u^3}+\frac{2}{4u^4}\right]_0^\infty \\
&= \frac{1}{\gamma^2}
\end{aligned}$$

Et donc, le cône d'émission possède en gros une demi-largeur $1/\gamma$ qui tend vers un cône infiniment fin quand $\gamma >> 1$.

## 2 Aimants de courbure

### 2.1 Trajectoire

9) Les particules chargée dans un champ magnétique possèdent une trajectoire circulaire, ou ici dans le cas d'aimant de taille finie, des arcs de cercle.
10) En système international, la fréquence cyclotron relativiste est $\omega_B = qB/(\gamma m)$. Le rayon de courbure est donc $R_c = v_\perp/\omega_B \approx c/\omega_B = \gamma mc/(qB)$
11) L'accélération est $a = v\omega_B \approx c\omega_B = qBc/(\gamma m)$
12) Le temps de parcours est : $T = L_{\text{tot}}/v \approx L_{\text{tot}}/c = 26660/3\times10^8 = 90\mu s$.
13) Avec 1232 aimants, il faut dévier d'un angle $2\pi$ donc chaque aimant dévie de $\theta_d = 2\pi/1232 = 5$ mrad.
14) Le facteur de Lorentz est : $\gamma = \mathcal{E}/m_pc^2 = 7$ TeV/938 MeV $= 7500$.

15) Rayon de courbure : $R_c = \gamma m_p c/(qB) = 7500 * 1.67 \times 10^{-27} * 3 \times 10^8/8.33/1.6 \times 10^{-19} = 2.8$ km.
16) la longueur d'un aimant est : $L = R_c\theta_d = 2800 * 0.005 = 14.3$m. Tous les aimants mis bout à bout représentent une longueur de $1232 * 14.3 = 17$km, soit environ 2/3 de la circonférence totale. Le tiers restant est composé de sections droites avec notamment des onduleurs et des wigglers.

### 2.2 Puissance

17) Il suffit de reporter l'expression de l'accélération dans la formule de la puissance totale : $P = q^4 B^2 \gamma^2/(12\pi\epsilon_0 m^2 c)$ Cette puissance augmente avec le champ magnétique et avec l'énergie de la particule.
18) $P_p/P_e = (\gamma_p/\gamma_e)^2(m_e/m_p)^2 = (\mathcal{E}_p/\mathcal{E}_e)^2(m_e/m_p)^4 = (m_e/m_p)^4 = 10^{-13}$. Clairement, à énergie égale, il vaut mieux utiliser des leptons.
19) La trajectoire est un arc de cercle. En chaque point de cette trajectoire, l'émission est confinée à un cône très fin tangent à la trajectoire et dans le sens de déplacement de la particule.
20) C'est exactement le même calcule car c'est le même cas physique. On trouve donc $\Delta t \approx 1/(\gamma^3\omega_B) = m/(\gamma^2 qB)$
21) En gros, tout est émis dans le fin cône d'émission, et donc : $\mathcal{E} = P\Delta t = q^3 B/(12\pi\epsilon_0 mc)$. Cette énergie est indépendant de l'énergie de la particule.

### 2.3 Spectre

22) Un observateur balayé par le faisceau lumineux voit un pulse du champ électrique au moment ou le cône d'émission est dirigé vers lui. Le spectre correspond à la transformée de Fourier temporelle de ce pulse. Il s'agit dont d'une bosse très similaire à celle présenté en cours. La différence essentielle est l'absence totale de raie (fondamentale et harmoniques) dans la mesure où le montage ne permet pas d'observer plusieurs giration autour de la ligne de champ. Le spectre est don continu, pique à une énergie caractéristique $E_c$ avec de couper brutalement.
23) L'énergie caractéristique est obtenue en gros comme l'inverse de la durée du pulse. C'est à dire : $E_c = h\nu_c = 3h\gamma^2 qB/(2m)$ (voir cours).
24) Pour `SOLEIL` : les particules ont un facteur de Lorentz : $\gamma = \mathcal{E}/(m_e c^2) = (2.75 \text{ GeV}/511 \text{ keV}) = 5300$. $E_c = (3/2)\mathcal{E}\gamma hqB/(m_e^2c^2) = 1.5 * 2.75 \times 10^9 * 5300 * 1.75(hq/m_e^2c^2) = 54$ keV. Il s'agit de rayonnement X.

## 3 Onduleurs et wigglers

### 3.1 Trajectoires

25) La seule force est la force de Lorentz (perpendiculaire à la trajectoire) qui ne travaille pas. Donc l'énergie est conservée, le facteur de Lorentz qui lui est proportionnel l'est aussi. Et la module de la vitesse qui est une fonction de $\gamma$ l'est aussi.
26) La vitesse totale ne peut dépasser $c$. Donc, si une de ses composantes $v_x \approx c$ approche la vitesse de la lumière, c'est que les autres composantes sont négligeables.
27) $m\gamma d\vec{v}/dt = q\vec{v}\times\vec{B}$ c'est à dire : $d\vec{v}/dt = (qB/m\gamma)\vec{v}\times\vec{e}_z$. On suppose qu'on rentre dans l'onduleur avec '$v_z = 0$, la force est toujours perpendiculaire à $z$ et donc, la trajectoire reste dans le plus perpendiculaire à $z$.
28) $a_y = dv_y/dt = -(qB/\gamma/m)v_x(t)\sin(k_u x(t)) \approx -(qB/\gamma/m)c\sin(k_u ct)$ et donc $< a_y^2 >= q^2B^2c^2/(2\gamma^2m^2)$.
29) En intégrant une fois l'équation sur $a_y$, on trouve : $v_y(t) = (qB/\gamma/m/k_u)\cos(k_u ct) = (K/\gamma)c\cos(k_u ct)$. Donc $v_y << c$ est équivalent à $K/\gamma << 1$. Trivialement, cette condition est satisfaite dans les onduleurs où $K << 1$. Et dans la mesure où on s'intéresse à des particules de $\gamma >> 1$, on peut très bien avoir $1 << K << \gamma$ dans les wigglers.
30) L'angle de déflexion est en gros $v_y/v_x = v_y/c = K/\gamma\cos k_u ct$. Le maximum vaut donc $K/\gamma$. D'après nos hypothèse, il doit donc rester très faible.
31) En intégrant encore, on trouve directement la formule demandée.
32) Pour `SOLEIL`, on avait montré que $\gamma = 5300$. C'est donc la valeur max que peut atteindre $K$. $B_{\max} = K_{\max} m_e 2\pi c/(q\lambda_u) = 5300*9.1\times10^{-31}*2\pi*3\times10^8+1.6\times10-19/0.02 = 2800$ T. Ce qui est complètement irréaliste (l'aimant le plus fort est d'environ 16 T). On a donc de la marge.

33) On connait $v_y$, on peut donc ré-exprimer la vitesse longitudinale comme suit : $v_x^2 = v^2 - v_y^2 = v^2 - K^2/\gamma^2 \cos^2(k_u ct)$. Et donc, le facteur de Lorentz longitudinal se calcule comme suit : $1/\gamma_x^2 = 1 - v_x^2/c^2 = 1 - v^2/c^2 + K^2/\gamma^2 \cos^2 k_u ct = 1/\gamma^2 + K^2/\gamma^2 \cos^2 k_u ct$ et donc : $\gamma_x = \gamma/(1 + K^2 \cos^2 k_u ct)^{1/2}$

34) Dans les onduleurs, $K << 1$ et donc, le terme oscillant est négligeable. Par contre, dans les wiggler, il ne l'est pas, et la valeur de $\gamma_x$ peut varier significativement, et d'autant plus que le wiggler est fort ($K >> 1$).

35) Le même calcul en remplaçant $v_y^2$ par $< v_y^2 >= K^2/(2\gamma^2)$ mène à la solution demandée.

## 3.2 Puissance émise

36) On peut réinjecter l'accélération trouvée dans la formule de la puissance : $P = q^4(B^2/2)\gamma^2/(12\pi\epsilon_0 m^2 c) = q^4\bar{B}^2\gamma^2/(12\pi\epsilon_0 m^2 c)$

37) C'est exactement la même puissance. Normal, il s'agit simplement d'une particule chargée dans un champ magnétique.

38) On a montré dans les préliminaires que l'angle d'ouverture du cône d'émission est en gros de $\theta_c = 1/\gamma$. Donc, le rapport $\theta_d/\theta_c = K$. Pour les onduleurs, l'angle de déflexion est bien plus faible que l'ouverture du cône de rayonnement. Pour les wigglers, il est beaucoup plus grand.

39) La trajectoire est une sinusoïde. Dans le cas des onduleurs, le cône de radiation pointe en tout point de la trajectoire le long de l'axe, si bien que l'angle total éclairé est simplement l'angle d'ouverture $\theta_c$ du cône radiatif de la particule seule. En revanche, dans les wigglers, le cône de lumière oscille fortement est pointe dans des directions différentes en des points différents de la trajectoire. L'angle total couvert par cette lampe torche oscillante correspond alors à l'angle de déflexion $\theta_d$ du mouvement wiggler.

40) On a montré que une particule dans un aimant droit dépose une certaine énergie sur un détecteur durant le court laps de temps où son cône d'émission passe sur le détecteur. Ici, c'est exactement la même chose, sauf qu'avant de ressortir du wiggler, la particule à oscillé $N_u$ fois, et a éclairé le détecteur $2N_u$ fois. La puissance totale accumulée est donc $2N_u$ fois plus importante.

## 3.3 Spectre

**Onduleurs**

41) Dans le référentiel qui se déplace le long de l'axe longitudinal d'un onduleur à une vitesse $v_x$ avec la particule, la particule oscille simplement le long de l'axe transverse $y$, de manière purement sinusoïdale ? Elle émet donc un champ électrique qui oscille lui aussi de manière sinusoïdale, et le spectre émis est une simple raie monochromatique à la fréquence d'oscillation de la particule.

42) La longueur d'onde dans le référentiel du wiggler est par définition $\lambda_u$. La contraction des longueur nous dit que dans le référentiel de la particule, elle est plus courte d'un facteur $\gamma_x$, c'est à dire $\lambda' = \lambda/\gamma_x$. La particule oscille donc à la fréquence plus élevée : $\nu' = c/\lambda'_u = \gamma_x c/\lambda_u$.

43) En utilisant la relation Doppler rappelée en intro : $\nu' = \gamma_x(1 - \beta_x \cos\theta)\nu \approx (1 + \gamma_x^2\theta^2)/(2\gamma_x)$, on trouve donc que $\nu = (c/\lambda_u)2\gamma_x^2/(1 + \gamma_x^2\theta^2)$, soit une longueur d'onde $\lambda = \lambda_u(1 + \gamma_x^2\theta^2)/\gamma_x^2/2$

44) Avec $\bar{\gamma}_x = \gamma/\sqrt{1 + K^2/2}$ on trouve donc : $\lambda = \lambda_u(1 + K^2/2)(1 + \gamma^2/(1 + K^2/2)\theta^2)/\gamma^2/2$, ce qui donne bien la relation demandée.

45) Le rayonnement de plus haute énergie est obtenue pour les plus petites longueurs d'onde, soit pour $\theta = 0$, le long de l'axe. Et alors : $\lambda_0 = \lambda_u(1 + K^2/2)/2/\gamma^2$

46) Application numérique : $\lambda_0 = 0.02/2/5300^2 = 0.35$ nm, ce qui correspond à une énergie de (1.24/0.35) = 3.5 keV. Il s'agit encore de rayons X.

47) Multiplier un signal par une fenêtre $N_u$ périodes, c'est à dire de longueur $N_u T_0$ où $T_0$ est la période du signal revient à convoluer la TF avec un sinus cardinal : $\sin(\pi\nu N_u T_0)/(\nu N_u T_0)$ dont le premier zéro $\pi\Delta\nu N_u T_0 = \pi$ définir la largeur typique : $\Delta\nu N_u/\nu_0 = 1$ soit $\Delta\nu/\nu_0 = 1/N_u$.

48) Pour $K << 1$, $\lambda_0/N = \Delta\lambda = \lambda(\theta_{\text{cen}}) - \lambda_0 = \lambda_u(1 + \gamma^2\theta_{\text{cen}}^2)/(2\gamma^2) - \lambda_u/(2\gamma^2) = \lambda_u\theta_{\text{cen}}^2/2 = \lambda_0\gamma^2\theta_{\text{cen}}^2$ et donc, $\theta_{\text{cen}} = 1/(\gamma\sqrt{N_u})$.

49) L'angle d'ouverture du cône d'émission d'une particule chargée est $\theta_c = 1/\gamma$. Le cône central d'un onduleur est donc un facteur $1/\sqrt{N_u}$ fois plus petit, facteur qui vaut donc en gros 10 pour des onduleurs typiques.

**Wigglers**

50) Dans un wiggler, chaque fois que le cône d'émission de la particule est dans l'axe, un observateur placé dans cet axe voit un pulse d'intensité. On pourrait recalculer la fréquence observée sou l'effet des différents changements de repère, mais il s'agit en fait de la même fréquence que celle qu'on a déjà calculer pour l'onduleur. Dans l'axe, celle-ci vaut donc : $\nu_0 = c/\lambda_0$.

51) Le spectre est donc un spectre de raies multiple de cette fréquence fondamentale, et dont la forme de l'enveloppe correspond à la TF de la forme du pulse. Finalement, pour un onduleur idéal ($K << 1$), le spectre est un unique raie. Puis, lorsqu'on augmente $K$, le mouvement transverse du faisceau commence à se faire sentir, la sinusoïde se déforme progressivement donnant naissance à des harmoniques dans le spectre. Pour $K > 1$, le motif temporel ressemble de plus en plus à des impulsions. Il y a de plus en plus d'harmoniques, et le spectre pique à de plus en plus hautes énergies.

52) La géométrie étant la même, les pulses ont un forme très similaire à celle observé lors du mouvement d'une particule dans un champ uniforme. L'enveloppe est donc en gros la même que celle obtenue avec un aimant de courbure. Si les champ magnétiques sont comparables dans l'aimant de courbure et le wiggler, alors, le spectre pique à la même énergie. La seule différence (subtile), est que la cône d'émission est dans l'axe du wiggler lorsque la particule est au sommet d'une sinusoïde, c'est à dire là où le champ est maximal. Si les deux appareils ont même champ magnétique moyen, l'intensité au maximum dans le wiggler est deux fois plus grande que celle de l'aimant, et la fréquence de coupure se trouve donc à deux fois plus grande énergie.

54) Ne pas faire...

# 4 Conclusion

55) • Puissance totale : Un électron qui passe dans les trois éléments émet la même puissance totale (pour une même champ magnétique et une même énergie).

• Distribution angulaire : dans un aimant, cette puissance est émise dans un mince cône relativiste qui balaye un grand angle qui correspond à l'angle de déviation de l'aimant. Un détecteur n'enregistrera donc qu'un faible fraction de cette puissance dissipée. Dans un wiggler, l'émission se fait elle aussi dans un mince cône relativiste, mais l'électron oscille N fois et éclaire donc 2N fois un détecteur dans l'axe avant de sortir. La puissance est donc 2N fois plus élevée. Dans un onduleur, l'émission se fait toujours dans un mince cône relativiste, mais qui éclaire toujours l'axe central. Il est cependant difficile de comparer sa puissance à celle du wiggler car cette comparaison dépend du $K$, de $\lambda_u$... En outre, si on se concentre sur une bande de longueur d'onde réduite, alors, le cône d'émission à cette longueur d'onde est beaucoup plus mince que le cône d'émission relativiste.

• Spectre : Les spectres des aimants de courbure et des wigglers sont quasiment identiques. Il piquent quasiment à la même énergie (pour une B donné). Le spectre des onduleur est radicalement différent. Il est essentiellement monochromatique (avec quelques harmoniques si $K$ n'est pas infiniment petit). Toute la puissance est donc émise dans une gamme de longeur d'onde extrêmement réduire, ce qui produit une puissance spectrale bien supérieure à celle des deux autres éléments.

56) On assimile parfois les onduleurs à des lasers car ils sont mono chromatiques et extrêmement collimatés. Il n'existe par ailleurs aucune autre méthode de réaliser des laser en X (il en existe au mieux en UV)

57) ...