

Rayonnement X dans les accélérateurs de particules

A rendre pour le mardi 11 Décembre

Dans ce problème, on se propose d'étudier certains aspects des accélérateurs de particules circulaires. Au delà de leur intérêt pour les collisions de particules à très haute énergie, les accélérateurs circulaires sont souvent utilisés comme des sources intenses de rayonnement X qui trouvent de nombreuses applications physiques, chimiques ou médicales. Après avoir été accélérées à haute énergie, les particules sont souvent maintenues à une énergie constante dans des anneaux de stockages où des cavités électriques permettent de compenser les pertes énergétiques d'origines diverses.

En réalité, les accélérateurs modernes ne sont pas exactement circulaires (voir Fig. 1). Ils présentent de nombreuses sections droites entre lesquelles des **aimants de courbure** permettent de dévier brutalement la trajectoire des particules. Comme nous le verrons, ces angles sont naturellement des lieux d'intense rayonnement. En outre, des **éléments d'insertion** supplémentaires appelés **onduleurs** et **wigglers** sont souvent insérés dans les sections droites. Ils sont également formés d'aimants et permettent de produire d'autres formes de rayonnement.

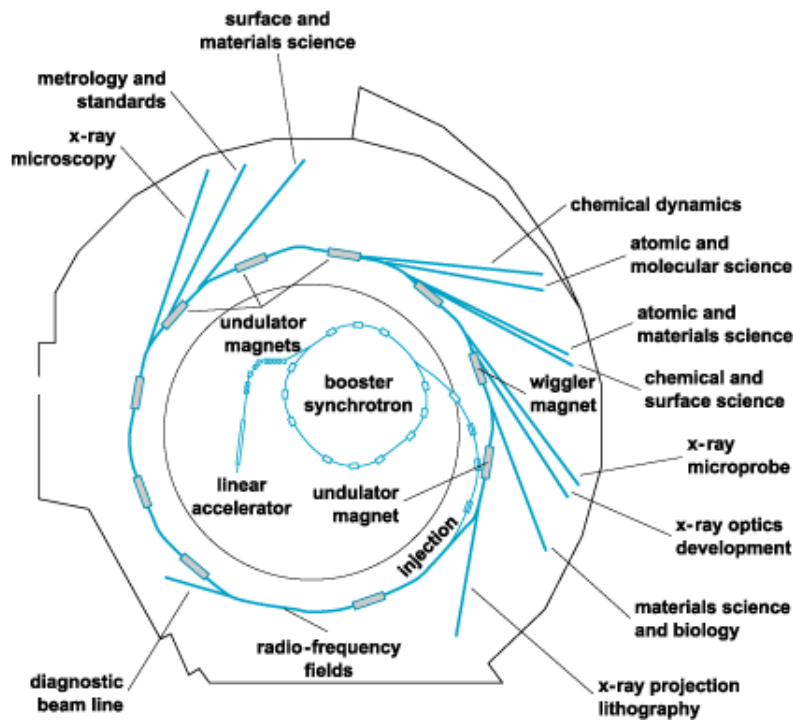


FIGURE 1 – Schéma d'un accélérateur circulaire dans lequel on peut distinguer les positions des aimants de courbure, des ondulateurs et des wigglers.

Nous nous intéressons ici à décrire les propriétés de l'émission de particules **ultra-relativistes** lors de leur passage dans ces différents éléments que sont les aimants de courbure, les ondulateurs et les wigglers.

Dans toute la suite, nous noterons c la vitesse de la lumière, q la charge des particules considérées ($q = -e$ pour les électrons et $q = +e$ pour les protons), m leur masse (m_e et m_p pour les électrons et les protons), $v = \beta c$ leur vitesse, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ leur facteur de Lorentz et $\mathcal{E} = \gamma mc^2$ et leur énergie.

Attention : les formules et unités seront données en système international.

1 Rappels et calculs préliminaires

Rappel 1 : Effet Doppler

On rappelle que des photons émis à une énergie $h\nu$ par une source en mouvement (à la vitesse $v = \beta c$) sont vus par un observateur au repos avec une énergie $h\nu'$ telle que :

$$h\nu' = \gamma(1 - \beta \cos \theta)h\nu$$

où θ est l'angle avec lequel l'observateur voit la source s'éloigner de lui. On appelle ce terme le facteur Doppler.

Rappel 2 : Puissance

On rappelle également qu'une particule chargée en accélération perpendiculaire émet un rayonnement de puissance totale

$$P = \frac{q^2}{12\pi\epsilon_0 c^3} \dot{v}^2 \gamma^4$$

et de distribution angulaire :

$$\frac{\partial P}{\partial \Omega} = \frac{3P}{8\pi} \frac{\gamma^2(1 - \beta \cos \Theta)^2 - \sin^2 \Theta \cos^2 \Phi}{\gamma^6(1 - \beta \cos \Theta)^5}$$

où Θ est l'angle entre la vitesse et la direction d'émission, et Φ est l'angle autour de l'axe de la vitesse.

Premiers calculs

- 1) Justifier que l'on peut considérer l'accélération comme perpendiculaire dans tous les appareils magnétiques comme les aimants, les onduleurs et les wigglers.
- 2) Exprimer $\partial \bar{P} / \partial \Omega$ la distribution angulaire moyennée sur l'angle Φ .
- 3) Décrire qualitativement la distribution en Θ de l'émission de particules ultra-relativistes. En déduire que pour de telles particules, on peut se contenter d'étudier la distribution à petits angles ($\Theta \ll 1$).
- 4) Montrer également que la vitesse des particules de haute énergie peut être approximée par : $\beta \approx 1 - 1/(2\gamma^2)$.
- 5) En déduire que, pour ces particules, le facteur Doppler s'écrit : $1 - \beta \cos \Theta \approx (1 + \gamma^2 \Theta^2)/(2\gamma^2)$.
- 6) Montrer alors que la distribution angulaire de particules relativistes peut s'écrire :

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial \Omega} = \frac{3\gamma^2}{\pi} \frac{1 + \gamma^4 \Theta^4}{(1 + \gamma^2 \Theta^2)^5} P$$

- 7) Tracer qualitativement l'allure de cette distribution en Θ .
- 8) La largeur typique de cette distribution peut être estimée en évaluant l'écart quadratique moyen σ_Θ de cette distribution, autour de zéro. Celui-ci est défini par $\sigma_\Theta^2 = (1/P) \int \Theta^2 (\partial P / \partial \Omega) d\Omega$. Calculer cette largeur pour les petits angles (ou pourra poser $u = 1 + \gamma^2 \Theta^2$) et montrer qu'elle tend vers zéro pour des particules très énergétiques.

2 Aimants de courbure

Les aimants de courbure sont généralement des électro-aimants qui génèrent des champs magnétiques uniformes et très intenses. En pratique, ils ont une structure fine et courbe qui épouse la trajectoire des particules tout en minimisant leur volume et donc l'énergie nécessaire à les alimenter (voir Fig. 2).

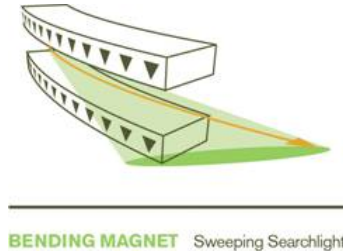


FIGURE 2 – Aimant de courbure épousant la trajectoire d'une particule (flèche).

2.1 Trajectoire

- 9) Quelle est la nature de la trajectoire d'une particule chargée dans un champ magnétique, et donc ici dans un aimant de courbure ?
- 10) Quel est le rayon de courbure R_c d'une particule relativiste de facteur de Lorentz γ se déplaçant dans un aimant de champ B (en système international) ?
- 11) Quelle est l'accélération subie par une telle particule ?

Le Large Hadron Collider accélère des protons jusque des énergies de $\mathcal{E} = 7$ TeV. Il les maintient ensuite sur une trajectoire fermée de circonférence totale 26.66 km, constituée de $N_a = 1232$ sections droites et autant d'aimants de courbure identiques. Le champ de ces aimants est de $B = 8.33$ T.

- 12) Combien de temps mettent les particules pour parcourir toute la circonférence du LHC ?
- 13) Sachant que leur trajectoire est fermée, quelle est la déviation angulaire θ_d dans chacun des aimants ?
- 14) Quel est le facteur de Lorentz des protons accélérés dans le LHC (on rappelle que $m_p c^2 = 938$ MeV) ?
- 15) Quel est le rayon de courbure des aimants du LHC ?
- 16) En déduire leur longueur. Quelle fraction de la longueur totale du LHC représentent-ils ?

2.2 Puissance

- 17) Exprimer la puissance P émise par une particule d'énergie γ traversant un aimant de champ magnétique B (en système international).
- 18) Comparer la puissance émise par des électrons et des protons accélérés à la même énergie. Quelle espèce est-il préférable d'accélérer pour produire un rayonnement intense ?
- 19) Représenter qualitativement la distribution angulaire de l'émission en plusieurs points de la trajectoire à l'intérieur d'un aimant de courbure.
- 20) En s'inspirant du cours, donner la durée Δt d'un pulse d'émission vu par un détecteur placé en un point balayé par le faisceau.
- 21) En déduire l'expression de l'énergie totale déposée sur le détecteur lors du passage d'une particule.

2.3 Spectre

- 22) Par analogie avec l'étude du rayonnement synchrotron vue en cours, tracer sans calcul l'allure du spectre observé.
- 23) Exprimer en particulier l'énergie caractéristique de coupure $E_c = h\nu_c$ qui apparaît dans ce spectre, en fonction du champ B de l'aimant et du γ de la particule.
- 24) Pour l'accélérateur SOLEIL (aimants de $B = 1.75$ T et électrons à $\mathcal{E} = 2.75$ GeV), estimer l'énergie typique des photons produits. À quelle gamme du spectre cette énergie correspond-elle ?

3 Onduleurs et wigglers

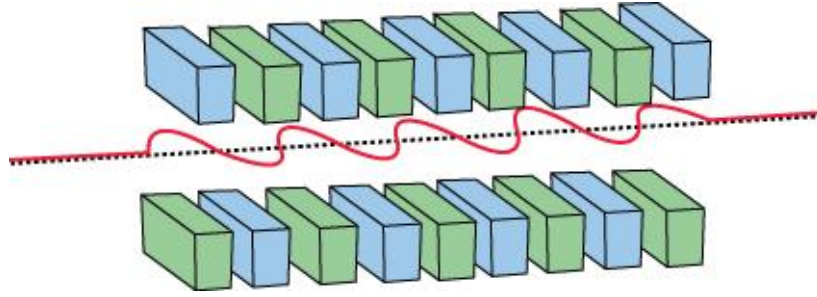


FIGURE 3 – Onduleur/wiggler avec sa succession de N_u pôles Nord et N_u pôles Sud magnétiques de chaque côté de la trajectoire

Les ondulateurs et les wigglers sont des appareils rectilignes, constitués d’une succession d’aimants dipolaires espacés avec une période $\lambda_u/2$, et de polarité alternée (voir Fig. 3). La direction longitudinale sera repérée par l’axe x . En bonne approximation, cette série d’aimants produit un champ magnétique vertical (selon z) d’intensité sinusoïdale, de période spatiale λ_u , et de fréquence spatiale $k_u = 2\pi/\lambda_u$:

$$\vec{B} = B \sin(k_u x) \vec{e}_z$$

Ces éléments d’insertion contiennent typiquement $N_u = 50 - 200$ périodes. On admettra que les effets de bord peuvent être négligés et que la particule garde en moyenne la même direction tout au long de sa trajectoire.

De manière générale, les ondulateurs et wigglers sont caractérisés par une constante sans dimension appelée *paramètre de déflexion magnétique* qui, pour des électrons, vaut :

$$K = \frac{qB}{m_e k_u c} = 0.934 \left(\frac{\lambda_u}{1\text{cm}} \right) \left(\frac{B}{1\text{T}} \right)$$

Par définition, les ondulateurs possèdent un faible paramètre $K \lesssim 1$ alors que les wigglers sont caractérisés par un fort paramètre : $K \gg 1$. Dans les deux cas, le champ magnétique est toujours suffisamment faible pour que la vitesse longitudinale ne soit que très peu affectée par la présence du champ magnétique si bien qu’on considérera toujours dans la suite que $v_x \approx c$.

3.1 Trajectoires

- 25) Justifiez que, lors de sa traversée, l’énergie, le facteur de Lorentz et le module de la vitesse sont conservés.
- 26) En déduire que l’hypothèse d’un mouvement longitudinal ultra-relativiste ($v_x \approx c$) implique nécessairement que le mouvement perpendiculaire est non relativiste ($v_y, v_z \ll c$).
- 27) Écrire l’équation du mouvement relativiste. En déduire que la trajectoire de l’électron est confinée au plan horizontal (x, y) .
- 28) Calculer l’accélération quadratique moyenne transverse $\langle a_y^2 \rangle$.
- 29) Intégrer une fois l’équation du mouvement et donner l’expression de la vitesse perpendiculaire $v_y(t)$ (on ne se préoccupera pas des constantes d’intégration). En déduire la condition sur K qu’impose l’hypothèse $v_x \approx c$. Vérifier que cette condition peut être satisfaite aussi bien dans les ondulateurs que dans les wigglers.
- 30) Montrer que K/γ correspond à une estimation de l’angle maximal de déflexion de la trajectoire par rapport à la direction longitudinale. En déduire qu’il reste faible.
- 31) Intégrer encore une fois et montrer que, tant que $v_x \approx c$, la position transverse est repérée par l’équation suivante :

$$y(t) = \frac{K \sin(k_u ct)}{\gamma k_u}$$

- 32) Pour SOLEIL qui accélère des électrons jusque des énergies de $E = 2.75$ GeV, quelle valeur maximale K_{\max} satisfait cette hypothèse (On rappelle que $m_e c^2 = 511$ keV)? Pour des paires d'aimants espacés de $\lambda_u = 2$ cm, quel champ magnétique B_{\max} serait nécessaire pour sortir de l'hypothèse de faible déflexion? Conclure que cette condition est bien toujours satisfaite dans ces cas réalistes.
- 33) En réalité, le vitesse longitudinale n'est jamais exactement égale à la vitesse de la lumière. À partir des résultats précédents donner une nouvelle estimation de v_x^2 , et en déduire l'expression du facteur de Lorentz longitudinal (défini par $\gamma_x(t) = (1 - v_x(t)^2/c^2)^{-1/2}$) en fonction notamment du γ total et de K .
- 34) Montrer que dans les onduleurs, γ_x peut être considérée comme constant alors que pour les wigglers, il est une fonction périodique du temps qui peut varier de manière significative.
- 35) Dans le cas général, montrer que le $\bar{\gamma}_x$ associée à la la vitesse quadratique moyenne du mouvement longitudinal vaut : $\bar{\gamma}_x = \gamma/\sqrt{1 + K^2/2}$.

3.2 Puissance émise

- 36) À partir de l'accélération calculée précédemment, calculer la puissance totale émise à chaque instant par un électron dans un onduleur ou un wiggler, et l'exprimer en fonction du champ magnétique moyen $\bar{B}^2 = \langle B(x)^2 \rangle$.
- 37) Comparer cette puissance à la puissance émise par la même particule dans un aimant de courbure de même champ magnétique moyen.
- 38) Pour les cas séparés des onduleurs et les wigglers, comparer l'angle de déflexion magnétique θ_d avec l'angle d'ouverture θ_c du cône d'émission d'une particule relativiste.
- 39) Dans les deux cas également, faire un dessin représentant la trajectoire des électrons dans le plan (x, y) et la distribution angulaire d'émission en plusieurs points de la trajectoire. Que vaut l'angle θ_f d'ouverture du faisceau total produit par un électron se déplaçant de ces appareils. Montrer qu'un observateur dans l'axe de l'appareil observe une succession de pulses dans les wigglers et une émission plus continue dans les onduleurs.
- 40) Sans calcul, montrer que l'énergie totale déposée lors du passage d'un électron dans un wiggler sur un détecteur placé dans l'axe est exactement $2N_u$ fois plus intense que celle mesurée au voisinage d'un aimant de courbure de même champ magnétique maximal.

3.3 Spectre

Onduleurs

Considérons dans un premier temps un onduleur idéal de longueur infinie.

- 41) Dans le référentiel qui se déplace le long de l'axe longitudinal d'un onduleur à une vitesse v_x avec la particule, quel est le mouvement de la particule? En déduire la nature du spectre émis par cette particule dans son référentiel propre.
- 42) En utilisant la contraction relativiste des longueurs, exprimer la longueur d'onde du champ magnétique vue par la particule (on prendra soin de faire apparaître $\bar{\gamma}_x$). En déduire la fréquence ν' à laquelle la particule oscille dans ce référentiel.
- 43) Par un nouveau changement de repère, en déduire qu'un observateur dans le référentiel du laboratoire, placé à un angle θ de l'axe, voit osciller le champ électrique produit avec une fréquence qui dépend de la direction d'observation.
- 44) Remplacer $\bar{\gamma}_x$ par son expression en fonction de K et γ , et montrer que, pour $K \ll 1$, la longueur d'onde des photons détectés est :

$$\lambda = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2} (1 + \gamma^2 \theta^2 + K^2/2)$$

- 45) Dans quelle direction observe-t-on le rayonnement le plus énergétique? Quelle est alors la longueur d'onde de l'émission λ_0 correspondante?
- 46) Pour un onduleur de $\lambda_u = 2$ cm et un électron à 2.75 GeV, que vaut cette longueur d'onde? À quelle gamme du spectre cette énergie correspond-elle (on rappelle qu'un longueur d'onde $\lambda = 1$ nm correspond à une énergie $h\nu = 1.24$ keV)?

En réalité, un onduleur possède une longueur finie et un nombre fini N_u de périodes. On peut donc considérer que le signal électrique mesuré par un détecteur correspond au signal qu'il aurait mesuré dans un onduleur infini, multiplié par une fenêtre (une distribution *porte*) de N_u périodes.

- 47) En utilisant les propriétés de la transformée de Fourier, montrer que les raies émises sont élargies par rapport à un onduleur infiniment long, et que leur largeur relative est $\Delta\nu/\nu = \Delta\lambda/\lambda = 1/N$.
- 48) Montrer que l'angle auquel l'électron émet un rayonnement dont la longueur d'onde $\lambda(\theta_{cen})$ s'écarte de la longueur d'onde central λ_0 d'une différence $\Delta\lambda$ vaut : $\theta_{cen} = 1/(\gamma\sqrt{N})$.
- 49) Cet angle définit ce qu'on appelle le *cône central*, c'est à dire la région physique de l'espace dans laquelle est émit l'essentiel du rayonnement dans la bande de longueur d'onde centré sur λ_0 et de largeur $\Delta\lambda$. Montrer qu'il est bien plus petit que le cône d'émission d'une particule relativiste.

Wigglers

- 50) Sans calcul, et en se basant sur les propriétés de la distribution angulaire de l'émission dans un wiggler, justifier que l'intensité du champ électrique vue par un observateur sur l'axe est constituée d'impulsions de courte durée qui se répètent avec une fréquence $\nu_0 = c/\lambda_0$.
- 51) Toujours sans calcul, expliquer comment évolue la forme du spectre lorsque l'on passe progressivement de $K < 1$ à $K > 1$.
- 52) Dans le cas de particules ultra-relativistes, quelle est la forme du spectre émis? En particulier, Comment se compare la fréquence caractéristique à celle d'un aimant de courbure de même champ magnétique moyen? En déduire qu'un wiggler émet des photons d'énergie comparable à ceux d'un aimant de courbure.
- 54) Comparer la largeur intrinsèque des raies $\Delta\nu/\nu = 1/N$ à la fréquence fondamentale, et en déduire pour quelle valeur de K on peut considérer le spectre comme continu.

4 Conclusion

- 55) Récapituler les différences et points communs entre ces 3 types d'éléments (puissance, distribution angulaire, spectre).
- 56) Pourquoi on assimile-t-on parfois les onduleurs à des lasers X.
- 57) Discuter de leurs avantages/inconvénients pour des utilisations diverses.