

# Introduction aux méthodes numériques de résolution des équations aux dérivées partielles (EDP)

## Cours 2

Sébastien DEHEUELS, Laurène JOUVE

Institut de Recherche en Astrophysique et Planétologie

Octobre 2017

# Plan du cours

- Les différents types de simulations numériques en astrophysique
- Méthodes numériques pour la résolution des EDP
  - Un peu de théorie
  - Propriétés de quelques schémas numériques simples (différences finies)
  - Comparaison de l'efficacité de deux schémas dans le cas d'une équation d'advection 1D
- Limitations des simulations numériques

# Rappels cours précédent

## EDP et traitement numérique

- Traitement numérique car pas de solution analytique du problème complet.
- Différentes méthodes numériques :
  - Différences finies
  - Éléments finis
  - Méthodes spectrales
- La meilleure méthode à adopter dépend du problème physique considéré
- Des tests (convergence, stabilité, problèmes simplifiés,...) sont toujours nécessaires.

# Rappels cours précédent

## Convergence d'un schéma de discrétisation

- L'erreur de consistance est obtenue en remplaçant  $u_{i+k,j+n}$  par  $u(x_i + k\Delta x, t_j + n\Delta t)$  dans le schéma de discrétisation.
- Le schéma est d'ordre  $p$  en temps et  $q$  en espace si l'erreur de consistance vérifie :

$$e_{i,j} = O(\Delta t^p) + O(\Delta x^q)$$

- Le schéma est consistant si l'erreur de consistance tend vers 0 lorsque tous les pas de discrétisation tendent vers 0.
- On appelle matrice d'amplification  $S$  telle que  $\hat{u}_{n+1} = S(k)\hat{u}_n$ .
- Le schéma est stable ssi le rayon spectral de la matrice d'amplification est borné par 1 quelque soit  $k$ .

Un schéma consistant et stable est convergent

## L'équation d'advection-diffusion

- On considère les processus d'advection et de diffusion appliqués à un champ scalaire  $T(x, t)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \in \mathbb{R}^+$ . On obtient l'EDP du 2eme ordre homogène suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + c \frac{\partial T}{\partial x} - \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

où  $c > 0$  est la vitesse (constante) d'advection et  $\kappa > 0$  est le coefficient (constant) de diffusion.

- On complète cette EDP de conditions aux limites et initiales.

# L'équation d'advection-diffusion : modélisation

- Si on considère le nombre sans dimension suivant, appelé **nombre de Péclet** :

$$Pe = \frac{cL}{\kappa}$$

où  $L$  est une longueur caractéristique du problème (par exemple la taille du domaine en  $x$ ).

- On peut alors distinguer 2 régimes limites :
  - $Pe \ll 1 \Rightarrow$  on obtient alors l'équation de diffusion (ou de la chaleur) :

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

- $Pe \gg 1 \Rightarrow$  on obtient alors l'équation d'advection :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + c \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

# L'équation d'advection-diffusion : solutions explicites

- Si on ajoute comme condition initiale :  $T(x, 0) = T_0(x)$  et aux limites  $T(0, t) = T(L, t) = 0$ .
- Les solutions explicites aux 3 régimes sont :
  - Equation de diffusion :

$$T(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} \int_{-\infty}^{+\infty} T_0(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4\kappa t}\right) dy$$

- Equation d'advection :

$$T(x, t) = T_0(x - ct)$$

- Equation d'advection-diffusion :

$$T(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} \int_{-\infty}^{+\infty} T_0(y) \exp\left(-\frac{(x-ct-y)^2}{4\kappa t}\right) dy$$

# L'équation de diffusion 1D : 1er schéma

Euler en temps + Différences finies centrées du 2ème ordre en espace (FTCS)

$$\frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta t} = \kappa \frac{(T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j})}{\Delta x^2} \quad \text{où } T_{i,j} = T(x_i, t_j)$$
$$\Rightarrow T_{i,j+1} = sT_{i-1,j} + (1 - 2s)T_{i,j} + sT_{i+1,j}$$

où  $s = \kappa \Delta t / \Delta x^2$  est le nombre de Courant-Friedrichs-Lewy pour la diffusion

## Stabilité

$$S(k) = 1 - 4s \sin^2(k\Delta x/2)$$

Stable si  $s = \kappa \Delta t / \Delta x^2 < \frac{1}{2}$

## Erreur de consistance

$$e = \kappa(\Delta x^2/2)(s - 1/6) \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^4)$$

La condition de stabilité impose :

$\Delta t$  inférieur à 0.5 fois le temps de diffusion à l'échelle de la maille  $\Delta x^2 / \kappa$

# L'équation de diffusion 1D : 2eme schéma

Centré en temps + centrées du 2ème ordre en espace (schéma de Richardson)

$$\frac{T_{i,j+1} - T_{i,j-1}}{2\Delta t} = \kappa \frac{(T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j})}{\Delta x^2}$$
$$\Rightarrow T_{i,j+1} = T_{i,j-1} + 2s (T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j})$$

Stabilité

$$\rho(S) = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}$$

$$\text{avec } a = -8s \sin^2 \left( \frac{k\Delta x}{2} \right)$$

Inconditionnellement instable!

Erreur de consistance

$$e = -\kappa(\Delta x^2/12) \frac{\partial^4 T}{\partial x^4}$$
$$+ O(\Delta t^2) + O(\Delta x^4)$$

# L'équation de diffusion 1D : 3eme schéma

Schéma de Crank-Nicholson : semi-implicite en temps

$$\frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta t} = \kappa \left( \theta \frac{T_{i-1,j+1} - 2T_{i,j+1} + T_{i+1,j+1}}{\Delta x^2} + (1 - \theta) \frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{\Delta x^2} \right)$$

Ceci est appelé un  $\theta$ -schéma.

Pour un schéma de Crank-Nicholson, on prend  $\theta = 1/2$ , soit :

$$\Rightarrow -\frac{s}{2}T_{i-1,j+1} + (1 + s)T_{i,j+1} - \frac{s}{2}T_{i+1,j+1} = \frac{s}{2}T_{i-1,j} + (1 - s)T_{i,j} + \frac{s}{2}T_{i+1,j}$$

Stabilité

$$S(k) = \frac{1 - 2s \sin^2(k\Delta x/2)}{1 + 2s \sin^2(k\Delta x/2)}$$

Inconditionnellement stable!

Erreur de consistance

$$e = -\kappa(\Delta x^2/12) \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + O(\Delta t) + O(\Delta x^4)$$

Pas de condition de stabilité sur le pas de temps  $\Delta t$ .  
 $\Delta t$  doit quand même être en accord avec la physique!

# L'équation de diffusion 1D : résumé

- Il existe des schémas **inconditionnellement instables**, **inconditionnellement stables** ou **conditionnellement stables**
- La stabilité est assurée si le nombre CFL  $\kappa\Delta t/\Delta x^2$  vérifie une condition (dite condition CFL) :

$$\frac{\kappa\Delta t}{\Delta x^2} < \alpha$$

- **Interprétation physique** : le pas de temps doit être inférieur au temps de diffusion d'un écart de température à l'échelle de la maille numérique
- En général  $\alpha$  décroît quand l'ordre spatial du schéma augmente  $\Rightarrow$  un schéma plus précis (ordre plus élevé en espace) est-il plus efficace ?

# L'équation d'advection 1D : 1er schéma

Euler en temps + Différences finies centrées du 2ème ordre en espace (FTCS)

$$\frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta t} + c \frac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{2\Delta x} = 0$$
$$\Rightarrow T_{i,j+1} = T_{i,j} - \frac{s}{2} (T_{i+1,j} - T_{i-1,j})$$

où  $s = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$  est le nombre de Courant-Friedrichs-Lewy pour l'advection

Stabilité

$$S(k) = 1 - i s \sin(k\Delta x)$$

Inconditionnellement instable

Erreur de consistance

$$e = c^2 \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$
$$+ c(\Delta x^2/6)(1 - s^2) \frac{\partial^3 T}{\partial x^3}$$
$$+ O(\Delta t^3) + O(\Delta x^4)$$

# L'équation d'advection 1D : 2eme schéma

Euler en temps + upwind en espace (ou décentré amont)

$$\frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta t} + c \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x} = 0 \quad \text{dans le cas } c > 0$$

$$\frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta t} + c \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta x} = 0 \quad \text{dans le cas } c < 0$$

## Stabilité

$$\begin{aligned} S(k) &= 1 - s(1 - \cos(k\Delta x)) \\ &\quad - i s \sin(k\Delta x) \end{aligned}$$

Stable si  $s = |c| \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1$

## Erreur de consistance

$$\begin{aligned} e &= -c(\Delta x/2)(1-s) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \\ &\quad + c(\Delta x^2/6)(1-s^2) \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \\ &\quad + O(\Delta t^3) + O(\Delta x^3) \end{aligned}$$

La condition de stabilité impose :

$\Delta t$  inférieur au temps d'advection à l'échelle de la maille  $\Delta x/c$

# L'équation d'advection 1D : 3eme schéma

Schéma Leapfrog (ou saute-mouton) : centré en temps et en espace (idem Richardson)

$$\frac{T_{i,j+1} - T_{i,j-1}}{2\Delta t} + c \frac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{2\Delta x} = 0$$
$$\Rightarrow T_{i,j+1} = T_{i,j-1} - s(T_{i+1,j} - T_{i-1,j})$$

Stabilité

$$\rho(S) = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4}}{2}$$

avec  $a = -2is \sin(k\Delta x)$

Stable si  $s = c \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1$

Erreur de troncature

$$e = c(\Delta x^2/6)(1 - s^2) \frac{\partial^3 T}{\partial x^3}$$
$$+ O(\Delta t^4) + O(\Delta x^4)$$

# L'équation d'advection 1D : résumé

- Il existe des schémas **inconditionnellement instables**, **inconditionnellement stables** ou **conditionnellement stables**
- La stabilité est assurée si le nombre CFL  $c\Delta t/\Delta x$  vérifie une condition (dite condition CFL) :

$$\frac{c\Delta t}{\Delta x} < \alpha$$

- **Interprétation physique** : le pas de temps doit être inférieur au temps d'advection d'un écart de température à l'échelle de la maille numérique
- en général  $\alpha$  décroît avec l'ordre spatial du schéma  
 $\Rightarrow$  un schéma plus précis (ordre plus élevé en espace) est-il plus efficace ?

# Dissipation et dispersion numérique

## Equation equivalente

- L'équation équivalente est l'équation obtenue en ajoutant au modèle le terme d'ordre dominant de l'erreur de consistance.
- Le schéma utilisé résout plus précisément l'équation modifiée que l'équation initiale
- On peut alors connaître plus quantitativement quel type d'erreur nous commettons sur la solution numérique
- Pour le schéma **upwind**, l'équation équivalente est donc :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + c \frac{\partial T}{\partial x} - c \frac{\Delta x}{2} (1 - s) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

- Pour le schéma **leap-frog**, l'équation équivalente est donc :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + c \frac{\partial T}{\partial x} + c \frac{\Delta x^2}{6} (1 + s^2/2) \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} = 0$$

# Dissipation et dispersion numérique

## Equation equivalente

- Pour les schémas que l'on a considérés, le terme supplémentaire est donc proportionnel à une dérivée d'ordre 2 ou 3
- L'ordre 2 correspond à un terme diffusif et l'ordre 3 à un terme dispersif
- Si l'on considère l'équation suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + c \frac{\partial T}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} = 0$$

avec  $T(x, t = 0) = \sin(kx + \phi)$

- On montre que la solution générale est :

$$T(x, t) = \exp(-\nu k^2 t) \sin[k(x - (c + \mu k^2)t) + \phi]$$

- On voit ici que la diffusion atténue l'amplitude alors que la dispersion modifie la vitesse de propagation (la phase de l'onde)

# Dissipation et dispersion numérique

## Illustration

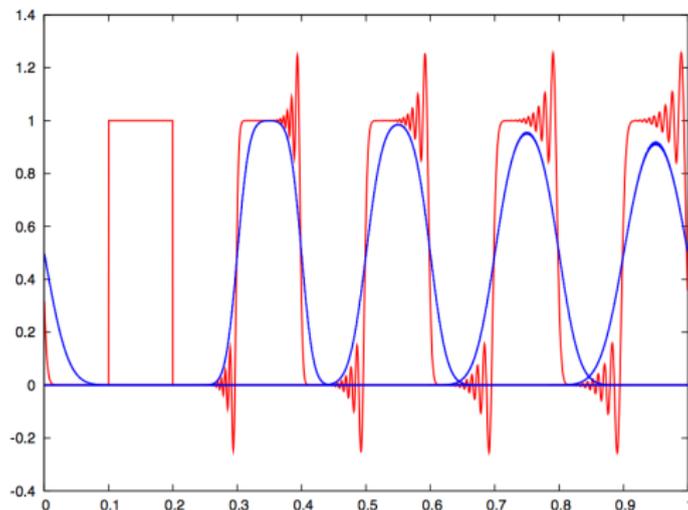


FIGURE : Diffusion et dispersion

*Advection d'une discontinuité calculée avec un schéma de Lax-Friedrichs diffusif (bleu) et de Lax-Wendroff dispersif (rouge)*

# Les méthodes de discrétisation d'ordre supérieur sont-elles plus efficaces ?

Ordre spatial plus élevé  $\Rightarrow$

- Le nombre de points de grille nécessaire pour atteindre une précision donnée est réduit  
 $\Rightarrow$  efficacité  $\nearrow$
- Le nombre d'opérations par point de grille augmente  
 $\Rightarrow$  efficacité  $\searrow$
- Le pas de temps maximum autorisé par la condition de stabilité décroît  
 $\Rightarrow$  efficacité  $\searrow$
- L'efficacité de l'algorithme dépend de l'architecture du calculateur

$\Rightarrow$  Il n'y a pas de réponse générale !

## Exemple où on a une réponse

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -c \frac{\partial T}{\partial x} \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

$$\text{Conditions aux limites} \quad T(0, t) = T(2\pi, t)$$

$$\text{Condition initiale} \quad T(x, 0) = e^{ikx}.$$

La solution exacte est l'onde progressive :

$$T(x, t) = e^{ik(x-ct)}$$

Nous allons chercher à caractériser l'erreur commise par une discrétisation **spatiale** d'ordre 2 puis d'ordre 4.

## Erreur sur la phase

- On a des conditions périodiques en espace pour  $T(x, t)$ .
- On suppose alors la forme suivante pour la solution :

$$T(x, t) = g(t) \exp(ikx)$$

- On note  $T_j(t) = g(t) \exp(ikj\Delta x)$
- On peut alors écrire notre équation d'advection (discrétisée seulement en espace) de la manière suivante :

$$\frac{dT_j}{dt} = -cT_j \frac{f(k\Delta x)}{\Delta x}$$

## Erreur sur la phase

- Pour le schéma centré d'ordre 2, on a :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_j \approx \frac{T_{j+1} - T_{j-1}}{2\Delta x} = T_j \frac{e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x}}{2\Delta x}$$

donc

$$f(k\Delta x) = i \sin(k\Delta x)$$

- Pour le schéma centré d'ordre 4, on a :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_j \approx \frac{T_{j-2} - 8T_{j-1} + 8T_{j+1} - T_{j+2}}{12\Delta x}$$

donc

$$f(k\Delta x) = i \frac{8 \sin(k\Delta x) - \sin(2k\Delta x)}{6}$$

## Erreur sur la phase

- Si on intègre l'équation différentielle précédente, on trouve la solution en temps suivante :

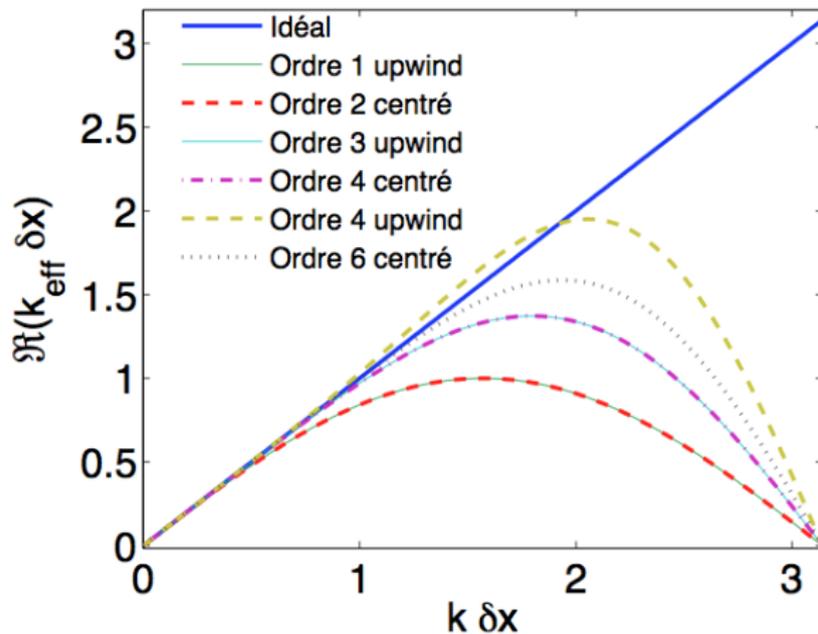
$$T_j(t) = \exp\left(-\frac{f(k\Delta x)}{\Delta x}ct + ikj\Delta x\right)$$

- On appelle nombre d'onde effectif  $k_{\text{eff}}$  le nombre suivant, qui représente l'erreur sur la phase :

$$k_{\text{eff}} = -i\frac{f(k\Delta x)}{\Delta x}$$

# Erreur sur la phase

## Illustration



# Erreur sur la phase

Comparaison des schémas du 2<sup>eme</sup> et du 4<sup>eme</sup> ordre

- On peut estimer l'erreur  $e_2$  :

$$e_2 = |(k - k_{\text{eff}})ct| = kct \left| 1 - \frac{\sin(k\Delta x)}{k\Delta x} \right| = kct \left( \frac{(k\Delta x)^2}{6} + O((k\Delta x)^4) \right)$$

- et l'erreur  $e_4$  :

$$\begin{aligned} e_4 &= |(k - k_{\text{eff}})ct| = kct \left| 1 - \frac{8 \sin(k\Delta x) - \sin(2k\Delta x)}{6k\Delta x} \right| \\ &= kct \left( \frac{(k\Delta x)^4}{30} + O((k\Delta x)^6) \right) \end{aligned}$$

- Je veux obtenir une précision de  $\epsilon$  après un temps correspondant à  $p$  périodes de l'onde. Combien de points  $\ell$  par longueur d'onde sont-ils nécessaires ?

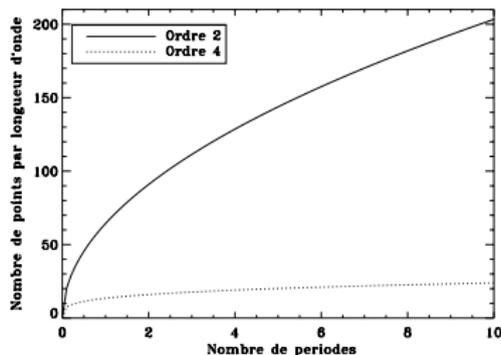
# Erreur sur la phase

Illustration pour  $\epsilon = 0.01$

- Par définition  $p = \frac{t}{T} = \frac{kct}{2\pi}$  donc  $kct = 2\pi p$  et  $\ell = \frac{\lambda}{\Delta x} = \frac{2\pi}{k\Delta x}$  donc  $k\Delta x = 2\pi/\ell$

$$e_M \leq \epsilon \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \ell_2 \geq 2\pi \left(\frac{\pi p}{3\epsilon}\right)^{1/2} \\ \ell_4 \geq 2\pi \left(\frac{\pi p}{15\epsilon}\right)^{1/4} \end{cases}$$

- Le rapport  $\frac{\ell_2}{\ell_4}$  augmente avec la précision et le temps physique



# Comparaison des schémas du 2<sup>eme</sup> et du 4<sup>eme</sup> ordre

- Un schéma aux différences finies d'ordre  $M$  requiert  $\sim M$  opérations par point de grille
- Le nombre d'opérations par pas de temps est  $M \times \ell_M$
- Le nombre total d'opérations est donc  
 $W_M = M \times \ell_M \times \text{le nombre de pas de temps}$

Estimation du nombre de pas de temps

Dépend-il de l'ordre de la discrétisation spatiale ?

# Quel schéma de discrétisation temporelle ?

## Formulation avec schéma explicite

- On a vu que l'on avait l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dT_j}{dt} = -cT_j \frac{f(k\Delta x)}{\Delta x}$$

- Si on adopte un schéma temporel explicite, on peut écrire la relation suivante entre  $T_{j,n+1}$  et  $T_{j,n}$  :

$$T_{j,n+1} = T_{j,n} [1 - \mathcal{T}(q)] \quad \text{où} \quad q = \frac{c\Delta t}{\Delta x} f(k\Delta x) = s f(k\Delta x)$$

- D'après l'analyse de Von Neumann, le schéma sera stable si  $|1 - \mathcal{T}(q)| < 1$ .

# Quel schéma de discrétisation temporelle ?

## Euler 1er ordre

- Pour Euler au premier ordre, on a  $\mathcal{T} = Id$
- Pour un schéma spatial centré,  $q$  est imaginaire pur et donc le schéma temporel d'Euler explicite est **inconditionnellement instable**

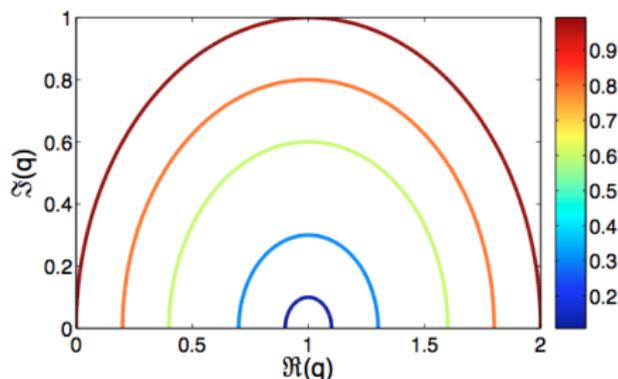


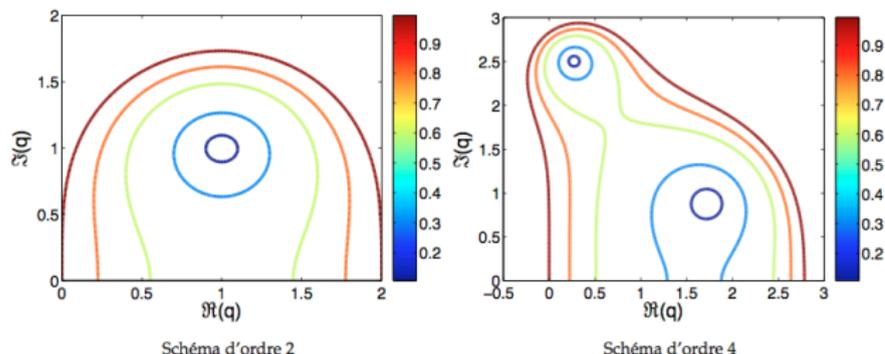
FIGURE : Stabilité de Euler 1er ordre

Valeurs de  $|1 - \mathcal{T}(q)|$  pour différentes valeurs de  $q \in \mathbb{C}$

# Quel schéma de discrétisation temporelle ?

## Runge-Kutta ordre 2 ou 4

- Pour RK2, on a  $\mathcal{T}(q) = q - q^2/2$  et pour RK4,  $\mathcal{T}(q) = q - q^2/2 + q^3/6 - q^4/24$
- Pour un schéma spatial centré,  $q$  est **imaginaire pur** et donc le schéma temporel RK2 est **inconditionnellement instable** alors que RK4 est **conditionnellement stable**.
- RK4 avec un schéma spatial centré est stable si  $|q| < 2\sqrt{2}$ .



**FIGURE :** Stabilité de RK2 et RK4

Valeurs de  $|1 - \mathcal{T}(q)|$  pour différentes valeurs de  $q \in \mathbb{C}$  pour RK2 et RK4.

# Stabilité de Von-Neumann de l'équation d'advection 1D

Condition CFL pour un schéma Runge-Kutta + différences finies centrées

- On sait que  $q = s f(k\Delta x)$  avec l'expression de  $f$  variant suivant l'ordre du schéma spatial. Il faut  $|q| < 2\sqrt{2}$  pour assurer la stabilité d'un RK4 en temps avec schéma centré en espace.

- 2<sup>eme</sup> ordre :  $f(k\Delta x) = i \sin(k\Delta x)$

$$\Rightarrow s_2 < 2\sqrt{2} \approx 2.82$$

- 4<sup>eme</sup> ordre :  $f(k\Delta x) = i \frac{8 \sin(k\Delta x) - \sin(2k\Delta x)}{6}$

$$\Rightarrow s_4 < 2.05$$

- 6<sup>eme</sup> ordre :

$$\Rightarrow s_6 < 1.77$$

## Comparaison de l'efficacité des schémas d'ordre 2 et 4

- Le nombre total d'opérations est

$$W_M = M \times \ell_M \times \text{Nombre de pas de temps}$$

- Le nombre minimum de pas de temps dépend de l'ordre de la discrétisation spatiale par l'intermédiaire de la condition CFL

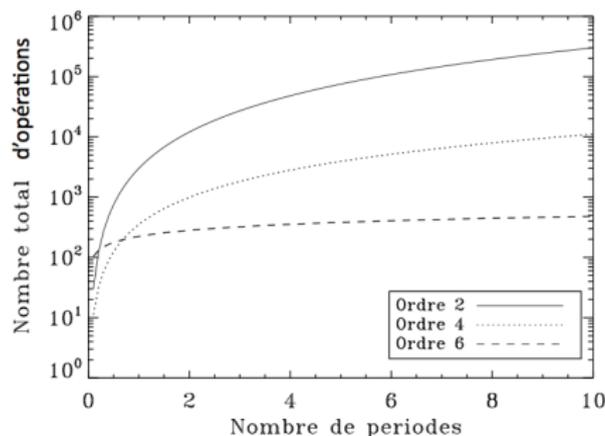
$$\frac{t}{\Delta t} = \frac{2\pi p}{kc\Delta t} = \frac{2\pi p}{kc(\Delta t/\Delta x)\Delta x} = \frac{p}{s_M} \frac{2\pi}{k\Delta x} = \frac{p\ell_M}{s_M}$$

- Pour les différences finies centrées d'ordre 2, 4, 6, le nombre d'opérations est respectivement (en utilisant les expressions obtenues pour  $\ell_M$ ) :

$$W_2 \approx 30p \frac{p}{\epsilon}, \quad W_4 \approx 35p \sqrt{\frac{p}{\epsilon}}, \quad W_6 \approx 48p \sqrt[3]{\frac{p}{\epsilon}}$$

# Comparaison de l'efficacité des schémas d'ordre 2 et 4

Illustration avec  $\epsilon = 0.01$



- Les schémas d'ordre plus élevé sont plus efficaces.
- Le gain en temps de calcul est d'autant plus important que la précision requise est grande et que le temps d'intégration considéré est long.

# Efficacité des différentes méthodes numériques

## Conclusion

- La meilleure méthode dépend du problème considéré
- Les méthodes d'ordre élevé sont généralement plus efficaces
- Pour les grandes simulations, l'efficacité de la parallélisation est cruciale

# Limitations des simulations numériques

De grandes variétés d'échelles spatio-temporelles dans les étoiles

## Les échelles de temps principales (pour le Soleil)

Nucleaire     $\gg$  Kelvin-Helmholtz     $\gg$  Chute libre  
 $10^{10}$  ans             $\gg 10^7$  ans             $\gg 30$  minutes

## Les échelles de temps dynamique

Rotation     $\gg$  Taches solaires     $\gg$  Granulation  
1 mois             $\gg$  qqs heures             $\gg$  5 minutes

## Les échelles spatiales de la dynamique

Rayon solaire     $\gg$  Taille de la granulation     $\gg$  Dissipation visqueuse  
 $7 \times 10^5$  km             $\gg 1000$  km             $\gg 1$  cm

# Solutions asymptotiques

Mouvements subsoniques dans une atmosphère compressible  $U \ll c_s$

$$t_s = \frac{L}{c_s} \ll t_{\text{dyn}} = \frac{L}{U} \Rightarrow \text{Forte contrainte CFL : } \Delta t \simeq \frac{\Delta x}{c_s} \ll \frac{\Delta x}{U}$$

- L'approximation de Boussinesq si  $L \ll$  échelle de hauteur de pression filtre les ondes sonores des équations fluides
- L'approximation anélastique filtre les ondes sonores des équations fluides

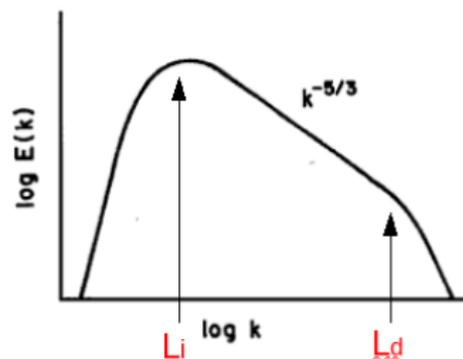
Mouvements dans une atmosphère à très forte diffusivité thermique

$$t_\kappa = \frac{L^2}{\kappa} \ll t_{\text{dyn}} = \frac{L}{U} \Rightarrow \text{Forte contrainte CFL : } \Delta t \simeq \frac{(\Delta x)^2}{\kappa} \ll \frac{\Delta x}{U}$$

- L'approximation des petits Péclet filtre le processus de diffusion thermique

# Le problème de la turbulence

- L'énergie cinétique est distribuée sur une large gamme d'échelle de temps et d'espace
- $\frac{L_i}{L_d} \simeq Re^{3/4} \Rightarrow N = (N_x)^3 \simeq Re^{9/4}$
- En extrapolant la loi de Moore, la convection solaire à nombre de Reynolds  $Re = 10^{14}$  pourra être simulée en 2120 !



Pas de solution théorique ou numérique au problème de la turbulence

# Simuler des écoulements à grands nombres de Reynolds

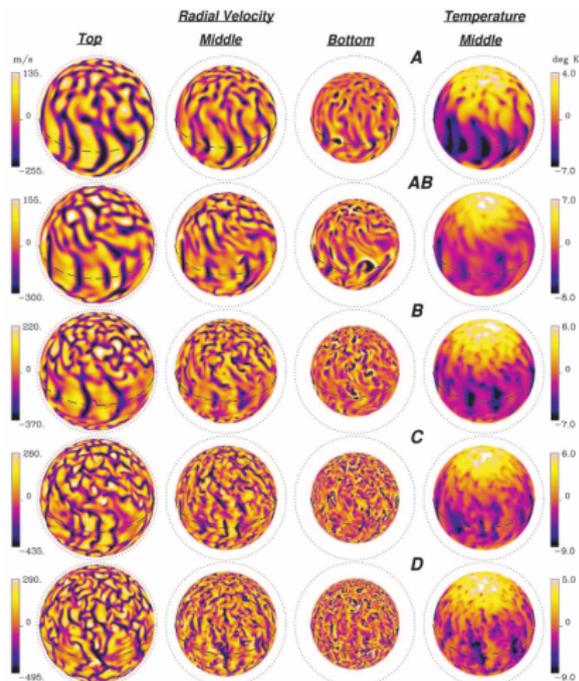
## Trois approches différentes

- Une viscosité numérique limite les gradients à l'échelle de la maille :
  - Facile à implémenter
  - Simuler des hauts  $Re$  ?
  - L'opérateur de dissipation n'est pas connu
  - La dissipation dépend de la taille de grille numérique
- LES (Large Eddy Simulation = Simulation aux grandes échelles) : modélisation de l'effet des échelles non-résolues sur les échelles résolues.
  - Peut être calibré pour simuler un écoulement à plus haut  $Re$
  - Pas de modèle de sous-maille pour la turbulence 3D stratifiée et à faible nombre de Prandtl des intérieurs stellaires
- DNS (Simulations Numériques Directes) : pas d'hypothèse
  - La solution ne dépend pas du schéma de discrétisation et/ou de la taille de grille
  - Limité aux "petits" nombres de Reynolds

# Example : Simulations globales de la convection solaire

Brun & Toomre 2002

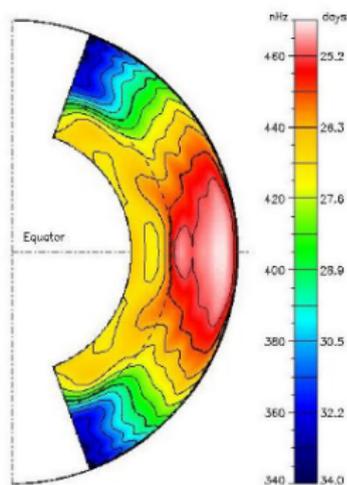
- Le code ASH : Anelastic Spherical Harmonics
- modèle « LES » : Flux d'entropie diffusif
- Evite les couches de surface
- Le nombre de Rayleigh  $3 \times 10^4 \leq Ra \leq 6 \times 10^5$
- Le nombre de Reynolds  $25 \leq Re \leq 410$
- Jusqu'à  $195 \times 512 \times 1024$  points de grille



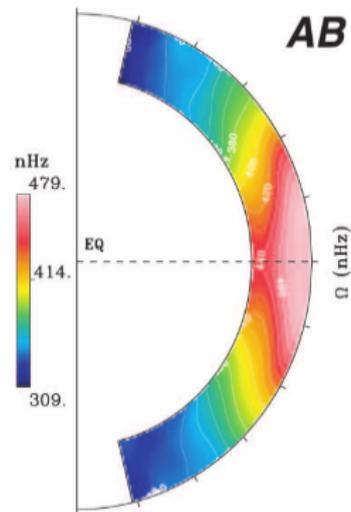
# Comparaison avec les données de l'héliosismologie

## La rotation différentielle

Inversion héliosismique



$R_e = 85$

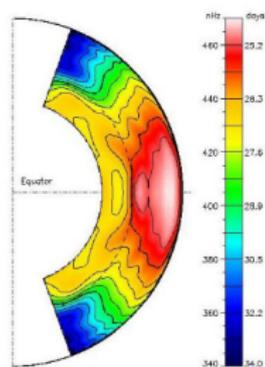


- Il y a un accord raisonnable avec les observations

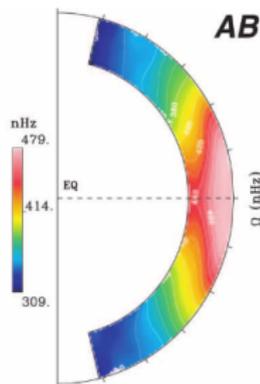
# Comparaison avec les données de l'héliosismologie

## La rotation différentielle

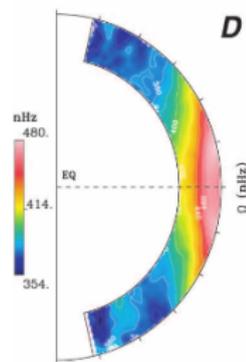
Inversion héliosismique



$R_e = 85$



$R_e = 410$



- La simulation à faible  $R_e$  s'approche des observations
- Mais, en augmentant le nombre de Reynolds, la solution numérique s'éloigne des observations!

# Conclusion

- Les simulations de
  - convection solaire globale
  - transport de moment cinétique dans les disques d'accrétionmontrent qu'il faut être prudent quand on compare le résultat des simulations avec les observations.
- Il est préférable d'envisager les simulations numériques comme des expériences de laboratoire qui permettent de tester des modèles.
- Toutefois dans certaines situations, les simulations numériques peuvent s'approcher de paramètres réalistes.
- Les simulations numériques directes (DNS) permettent d'étudier l'effet produit par l'augmentation du nombre de Reynolds et en tirer des lois asymptotiques.

## Quelques références

- Allaire, G., Analyse numérique et optimisation, Editions de l'Ecole Polytechnique, 2012
- Fletcher C.A.J. , Computational Techniques for Fluid Dynamics I, Springer, 1991
- Hesthaven J.S., Gottlieb S., Gottlieb D., Spectral Methods for Time dependent Problems, Cambridge Univ. Press, 2007
- Jedrzejewski, F., Introduction aux méthodes numériques, Springer, 2005
- Lesur, G., Thèse de Doctorat, Université Grenoble 1, 2007