

Sujet 7

Déferlement de vagues (**)

La dynamique d'un fluide idéal est décrite par l'équation d'Euler

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \vec{\mathcal{F}} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla}p, \quad (1)$$

où $\vec{v}(\vec{r}, t)$ est le champ vectoriel des vitesses des particules du fluide au point \vec{r} et au temps t . $\vec{\mathcal{F}}(\vec{r})$ est la force extérieure (par unité de masse), $p(\vec{r}, t)$ la pression et $\rho(\vec{r}, t)$ la densité du fluide (masse par unité de volume). Pour déterminer les trois champs \vec{v} , p et ρ , il faut aussi utiliser deux autres équations, l'équation de continuité :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{v}) = 0, \quad (2)$$

décrivant la conservation de masse, et l'équation d'état $\rho = \bar{\rho}(p)$ décrivant le lien entre ρ et p pour le fluide. On rappelle que $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$ est l'accélération *particulaire* mesurée en suivant les trajectoires des particules alors que $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}$ mesure seulement le changement du champ des vitesses au point \vec{r} donné. On désigne par $\vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{\nabla} \wedge \vec{v}$ la vorticité. En utilisant $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{v}^2) - \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{v})$ on peut réecrire (1) sous la forme

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{v}^2) - \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) = \vec{\mathcal{F}} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla}p. \quad (3)$$

Pour modéliser le comportement de la houle, on considère maintenant un fluide :

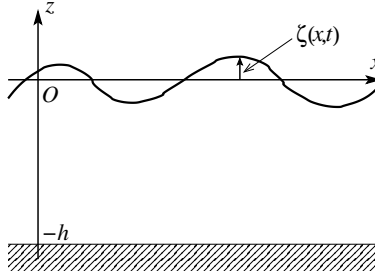
1. bi-dimensionnel, i.e. invariant par translation le long de la direction y , de sorte que les seules variables du problème sont x , z et t (cf. Figure) ;
2. incompressible : $\rho = \text{Cst.}$ et $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$;
3. non-visqueux ;
4. sans tension de surface, de sorte que sa pression près de la surface est égale à la pression atmosphérique P_0 ;
5. irrotationnel : $\nabla \wedge \vec{v} = 0$, de sorte que \vec{v} dérive d'un potentiel des vitesses $\phi(x, z, t)$: $\vec{v} = \vec{\nabla}\phi$. On a donc $\Delta\phi = 0$ (Pourquoi ?). En déduire aussi l'équation de Bernouilli $\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + gz + P/\rho = \text{Cst.}$ à partir de (3).

Sauf mention explicite du contraire, le fond se situe à $z = -h < 0$ et la position d'équilibre de la surface à $z = 0$. La surface a pour équation $z = \zeta(x, t)$, comme indiqué sur la Figure.

1 Cas linéaire : solution analytique

Dans un premier temps, on considère que ζ est petit devant les longueurs d'ondes considérées (en Fourier, $\zeta k \ll 1$). En linéarisant les équations au premier ordre, on pourra alors obtenir une solution

Sujet 7. Déferlement de vagues (**)



analytique¹. Expliquer pourquoi l'équation de Bernoulli s'écrit $\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\zeta(x, t) = 0$ à cet ordre. Expliquer aussi pourquoi on a $\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}$ à la surface, et $\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$ au fond. Dans cette partie, on cherche les solutions ϕ sous la forme

$$\phi(x, z, t) = f(z) \exp[i(kx - \omega t)]. \quad (4)$$

On s'intéresse pour commencer au cas d'un fond infini ($h \rightarrow \infty$). En utilisant $\Delta \phi = 0$, montrer que $f(z) = A \exp(kz)$. Montrer ensuite, en utilisant l'équation de Bernoulli, que la relation de dispersion est $\omega^2 = kg$. Ce résultat était-il prévisible par simple analyse dimensionnelle ?

Faire la même analyse dans le cas d'un fond fini $h > 0$. Montrer qu'à grandes longueurs d'onde, la célérité des ondes de surface est $c_0 = \sqrt{gh}$. Que se passe-t-il si h diminue ?

2 Au-delà du cas linéaire : équations de Korteweg-de Vries et de Burgers

Pour résoudre le problème précédent analytiquement, nous avons supposé que ζ est petite devant la longueur d'onde, autrement dit que $\zeta k \ll 1$, ceci afin de linéariser les équations.

Si l'on souhaite aller au-delà de cette approximation linéaire, on peut obtenir une EDP vérifiée par ζ . C'est l'équation de Korteweg-de Vries (1895), un peu longue à obtenir, même si le calcul ne présente pas de difficulté majeure² :

$$\frac{1}{c_0} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{3}{2h} \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} = 0. \quad (5)$$

Si l'on pose $x' = x - c_0 t$ et $t' = t$, le second terme disparaît. Expliquer pourquoi en regardant la contribution des deux premiers termes. En posant $\xi = \zeta/h$, $X = x'/h$ et $T = 6c_0 t'/h$, on arrive à une équation non-linéaire réduite de la forme :

$$\frac{\partial \xi}{\partial T} + \xi \frac{\partial \xi}{\partial X} + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \xi}{\partial X^3} = 0. \quad (6)$$

On pourrait faire une étude analytique de cette équation. On trouverait en particulier certaines solutions appelées *solitons*. Ici, nous nous contenterons d'étudier numériquement une forme plus simple, appelée équation de Burgers :

$$\frac{\partial \xi}{\partial T} + \xi \frac{\partial \xi}{\partial X} = 0. \quad (7)$$

- Commencer par résoudre analytiquement l'EDP $\frac{\partial \xi}{\partial T} + v \frac{\partial \xi}{\partial X} = 0$, où $v = \text{Cst}$. Interpréter.
- En remarquant qu'elle présente des similitudes avec l'équation de la diffusion étudiée en cours, résoudre cette dernière équation numériquement par la méthode des éléments finis³.

1. Voir L. Landau, E. Lifchitz, Physique théorique, Tome 6, Mécanique des fluides (Éditions Mir Moscou), chapitre premier.

2. Référence complète à ce sujet : M. Peyrard, T. Dauxois, Physique des solitons (Savoirs Actuels, CNRS Editions-EDP Sciences, 2004). Voir en particulier le premier chapitre et l'appendice A.

3. On prendra garde à sa stabilité numérique. Un schéma stable consiste à écrire $\xi_j(t_{k+1}) = \frac{1}{2}[\xi_{j+1}(t_k) + \xi_{j-1}(t_k)] - \frac{\delta t}{2\delta x}[\xi_{j+1}(t_k) - \xi_{j-1}(t_k)]$, avec $\delta t < \delta x/v$.

-
- Étudier l'équation (7). On prendra pour commencer $\delta t = 0.1$, $\delta x = 1$, et comme condition initiale une gaussienne de largeur $\sigma = 10$ et de hauteur 0.1.
 - Observer l'évolution de la solution aux petits temps puis aux temps plus longs. Commenter.
N.B. : tenir compte du fait que T n'est pas le vrai temps pour interpréter les résultats.
 - Pour aller au-delà, considérer l'équation

$$\frac{\partial \xi}{\partial T} + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \xi}{\partial X^3} = 0, \quad (8)$$

puis l'équation (6) complète.

◇ Autres pistes d'étude :

1. Solitons : chercher des solutions exactes de l'équation (6) sous la forme $\zeta = 1/\cosh^2(\alpha X - \beta T)$. Comprendre comment les deux effets antagonistes observés dans les études des équations (7) et (8) se compensent dans ce cas pour mener à ces solutions localisées.
2. Déferlement près d'une côte : lorsque les vagues s'approchent du rivage, h n'est plus constante mais dépend de x . Considérer le cas $h(x) = -ax + b$, a petit, dans (5). Qu'arrive-t-il aux différents termes de (5) lorsque h s'approche de 0 ?