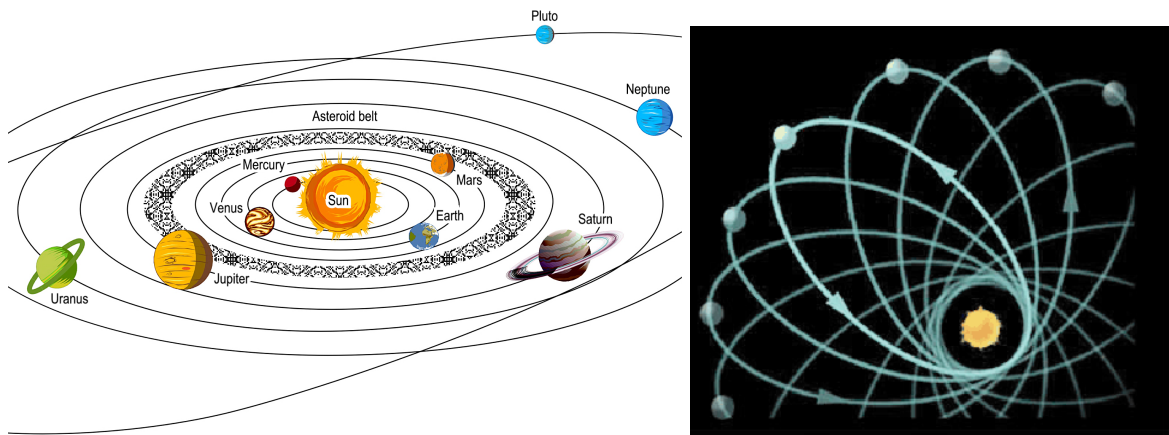


Orbites des planètes dans le système solaire

Le but de ce projet est d'étudier le mouvement des planètes dans le système solaire, et notamment l'influence des différentes planètes entre-elles. Les équations du mouvement sont des équations aux dérivées ordinaires (EDO) qu'il faudra résoudre numériquement.



Les différents aspects présentés dans ce sujet correspondent à plusieurs suggestions d'études. Il est laissé à la liberté des étudiants de choisir quelle (ou quelles) partie(s) ils préfèrent approfondir, et éventuellement de s'orienter vers des sujets connexes.

1 Problème de Kepler simple à deux corps restreint

Avant toute étude complexe, il est important de tester les méthodes développées sur des cas connus. Ici par exemple, il est proposé d'étudier le cas du problème de Kepler simple, où une planète seule orbite dans le potentiel du soleil de masse $M_{\odot} = 1,9891 \times 10^{30}$ kg. Les orbites de Kepler étant planes, on se limitera à résoudre les équations en 2D dans le plan de l'orbite.

- Écrire les équations du mouvement dans le plan orbital (il sera plus aisé de faire apparaître la constante de gravitation exprimée dans des unités adéquates : $G = 2.959122 \times 10^{-4} au^3/j^3/M_{\odot}$).
- Écrire un programme qui résout ces équations et détermine la trajectoire de cette planète (Des exemples de conditions initiales sont données plus bas pour les différentes planètes du système solaire. On pourra prendre ici $z = 0$).
- S'assurer que le programme bien a été écrit de manière vectorielle et qu'il sera facilement possible de le faire évoluer.
- Tester et comparer plusieurs méthodes numériques. Vérifier en particulier la conservation de l'énergie totale, de l'impulsion totale et du moment cinétique total. En déduire la méthode la plus adaptée à ce problème ainsi que le pas de temps maximal pour une orbite de rayon donné. Comment doit évoluer ce pas de temps si on s'intéresse à une planète plus lointaine ?
- Pour chacune des planètes, tracer par exemple la courbe $r_i(t)$ de la distance au Soleil en fonction du temps.

2 Problème à 10 corps

Maintenant que la méthode numérique de résolution à été testée et éprouvée, on peut complexifier un peu le problème et étudier l'influence des différentes planètes les unes sur les autres. Le but est donc ici d'étudier les trajectoires 3D simultanément du soleil et des neuf planètes en prenant en compte leurs interactions mutuelles.

- Écrire formellement le système d'équations du mouvement à trois dimensions pour un nombre de planètes quelconque.
- À partir du programme précédent, écrire un nouveau programme qui résout ces équations.
- Vérifier que l'on trouve des résultats compatibles avec les précédents lorsque l'on fixe artificiellement les masses des planètes et la vitesse du soleil à zéro.
- Représenter les orbites des planètes internes. Les comparer aux orbites du problème de Kepler simple.
- Pour chaque astre, tracer les nouvelles distances $r_i(t)$ au centre de masse du système. Comparer ces courbes à celles trouvées dans le cas du problème de Kepler simple.
- Déterminer quelles planètes sont les plus perturbées, ainsi que celles responsables des perturbations les plus importantes.

3 Avancée du périhélie des planètes

Dans le problème de Kepler simple (voir partie 1), le périhélie d'une planète orbitant autour du soleil est fixe. Dans le problème à 10 corps, les forces dues aux autres planètes modifient cette trajectoire de référence, et le périhélie se déplace avec le temps. Il possède souvent une trajectoire complexe, mais il suit toujours, en moyenne, une dérive séculaire dans le sens de l'orbite. On parle de l'avancée du périhélie. Cette avancée est reportée dans le tableau pour différentes planètes.

On pourra essayer de reproduire ces observations, en particulier celles de la planète Mercure. Ce travail est délicat car les effets des planètes les unes sur les autres sont très légers, et souvent dominés par des erreurs numériques. Il faudra donc prendre un soin particulier aux choix de la méthode, du pas de temps utilisé et du temps physique d'étude.

- Adapter le programme précédent pour mesurer la position du périhélie des planètes.
- Mesurer l'amplitude des effets numériques sur le périhélie dans le cas du problème de Kepler simple.
- Tracer l'évolution à long terme de la position du périhélie des différentes planètes jusqu'à Saturne et mesurer leur dérive moyenne.

Attention, ce dernier calcul peut prendre un certain temps. Il est donc indispensable d'être sûr de la validité du programme avant de le faire tourner avec les paramètres optimaux. Le cas échéant, on pourra séparer l'étude des planètes internes et celle des planètes externes.

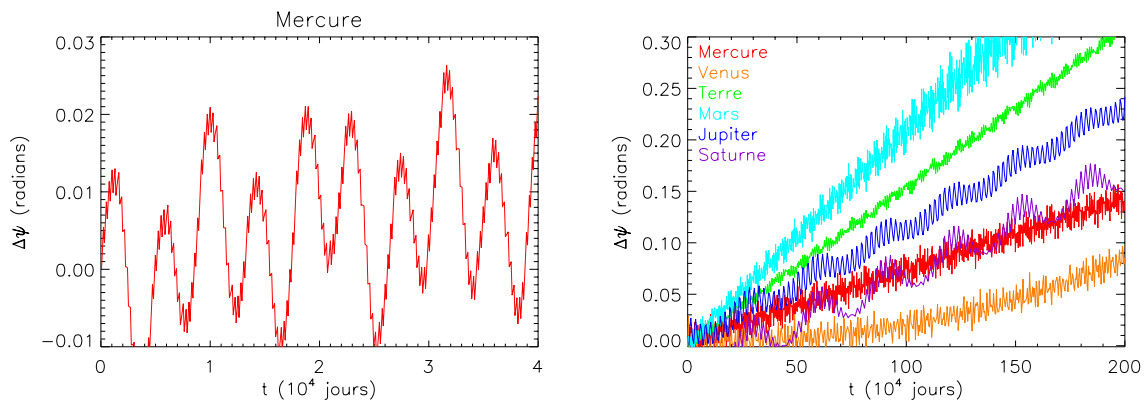


FIGURE 1 – Avancée du périhélie de mercure et des différentes planètes

4 Propriétés de référence des planètes

Le tableau suivant présente les coordonnées des différentes planètes (en unités astronomiques, u.a.), ainsi que leurs vitesses (en unité astronomiques par jour, u.a./j) à la date du 8 Novembre 2012 (d'autres éphémérides peuvent être obtenues à l'adresse suivante : <http://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi>)¹. Les coordonnées sont de type cartésien. Elle sont définies de manière à ce qu'à une époque de référence donnée (J2000 pour désigner le 1er Janvier 2000), le plan (x, y) coïncide avec le plan de l'écliptique et tel que l'axe x pointe dans la direction de l'équinoxe moyen.

Les deux dernières lignes de ce tableau donnent également les avancées des périhélies (en secondes d'arc par an, "/an), observées, et calculées en prenant en compte les forces respectives des différentes planètes (<http://www.farside.ph.utexas.edu/teaching/336k/Newton.pdf>).

	Soleil	Mercuré	Vénus	Terre	Mars
M/M_{\odot}	1.0000e00	1.6600e-7	2.4476e-6	3.0032e-6	3.2268e-7
x	-1.6132380e-03	3.4942761e-01	-5.7685710e-01	6.8900355e-01	4.3534005e-01
y	-2.3674938e-03	1.0619088e-02	4.2639983e-01	7.0799513e-01	-1.3548686e+00
z	-3.4999903e-05	-3.1182970e-02	3.9039256e-02	-5.4762805e-05	-3.9100527e-02
v_x	6.0453208e-06	-6.4674481e-03	-1.2159929e-02	-1.2606830e-02	1.3851438e-02
v_y	-1.8980631e-06	2.9372684e-02	-1.6321487e-02	1.1932472e-02	5.5002850e-03
v_z	-1.3060634e-07	2.9939160e-03	4.7839154e-04	-5.3326343e-07	-2.2479471e-04
ψ_{obs}	—	5.75	2.04	11.45	16.28
$\dot{\psi}_{\text{th}}$	—	5.50	10.75	11.87	17.60

	Jupiter	Saturne	Uranus	Neptune	Pluton
M/M_{\odot}	9.5425e-4	2.8572e-4	4.3643e-5	5.1486e-5	6.6060e-9
x	1.8147606e+00	-8.2319838e+00	1.9916762e+01	2.6481558e+01	4.9371124e+00
y	4.7059241e+00	-5.2651142e+00	2.3700466e+00	-1.4076556e+01	-3.1890424e+01
z	-6.0234633e-02	4.1915711e-01	-2.4922728e-01	-3.2040642e-01	1.9843679e+00
v_x	-7.1329432e-03	2.7027945e-03	-4.9354675e-04	1.4527105e-03	3.1711953e-03
v_y	3.0767709e-03	-4.7129500e-03	3.7222065e-03	2.7901455e-03	-1.4100225e-04
v_z	1.4683761e-04	-2.5483556e-05	2.0227673e-05	-9.1342324e-05	-9.0807325e-04
ψ_{obs}	6.55	19.5	3.34	0.36	?
$\dot{\psi}_{\text{th}}$	7.42	18.36	2.72	0.65	?

1. Les coordonnées solaires ont été légèrement modifiées pour obtenir un repère dans lequel l'impulsion totale et le barycentre sont les plus faibles possibles compte tenu de la précision de valeurs utilisées.