

Relation masse-rayon des naines blanches : contraintes observationnelles sur un modèle de gravité modifiée

Les naines blanches sont des résidus d'étoiles de faible masse (au plus $\sim 8M_{\odot}$). Ces étoiles, après avoir consommé par réactions de fusion thermonucléaire tout l'hydrogène et tout l'hélium disponible en leur cœur, refroidissent lentement en puisant dans leur énergie gravitationnelle et thermique. Ce sont des objets denses (environ 1 tonne par cm^3) dont l'intérieur est *dégénéré* (le principe d'exclusion de Pauli est contraignant pour la distribution d'énergie des électrons). Comme on le mentionnera plus bas, l'intérieur des naines blanches peut être modélisé simplement par des modèles dits *polytropiques*. Lors de ce projet, on cherchera à estimer théoriquement la relation masse-rayon des naines blanches et on retrouvera entre autre l'expression de la *masse de Chandrasekhar* (masse maximale que peut supporter la pression de dégénérescence des électrons).

De plus, les naines blanches ont été récemment proposées comme candidates pour tester certains modèles de *gravité modifiée*. Depuis la découverte de l'accélération de l'expansion de l'univers, les théoriciens ont produit un grand nombre de modèles de gravité modifiée, qui peuvent expliquer cette accélération sans rajouter de fluide d'énergie noire. Pour échapper aux contraintes très fortes à l'échelle du système solaire, ces modèles de gravité modifiée possèdent un mécanisme d'écrantage qui rend la modification très faible aux petites échelles. Le mécanisme de Vainshtein est l'un d'eux. Récemment, Koyama & Sakstein (2015) ont montré que dans certains modèles, ce mécanisme d'écrantage n'est pas total à l'intérieur des étoiles et se traduit par l'ajout d'un terme supplémentaire dans l'équation de l'équilibre hydrostatique. Cela suggère qu'un test de cette théorie de gravité modifiée pourrait être apporté par la physique stellaire.¹ La compacité des naines blanches les rend particulièrement sensibles à une modification de la gravité. On se propose dans ce projet de tester certaines théories de gravitation modifiée utilisant le mécanisme d'écrantage de Vainshtein au moyen de la relation masse-rayon des naines blanches.

1 Équation de Lane-Emden

La matière stellaire peut être considérée comme un fluide et elle peut donc être décrite par les équations de l'hydrodynamique. Comme ces équations sont non-linéaires, leur résolution analytique n'est a priori pas possible. On va se mettre dans un cas simple où la résolution des équations de la structure stellaire est grandement simplifiée. Pour cela, on considérera que l'étoile est à symétrie sphérique (i.e. les grandeurs qui caractérisent une couche ne dépendent que de sa distance r au centre de l'étoile) et qu'il existe une relation dite *polytropique* entre la pression et la densité du gaz, c'est-à-dire que :

$$P = K\rho^\gamma \text{ avec } \gamma \equiv 1 + \frac{1}{n} \quad (1)$$

1. On note que cette perspective est intéressante, dans la mesure où il est extrêmement difficile de tester par ailleurs les modèles de gravité modifiée, du fait du mécanisme d'écrantage.

où n est appelé l'*indice polytropique*. Cette hypothèse permet de résoudre les équations de la structure interne pour obtenir la pression et la densité du gaz indépendamment de la température, c'est-à-dire sans avoir à se soucier de la génération et du transport de l'énergie dans l'étoile, qui sont des processus complexes (voir cours de physique stellaire). Les modèles polytropiques (ou *polytropes*) sont de simples approximations des intérieurs stellaires, mais s'approchent de la structure réelle des étoiles dans certains cas, en particulier pour les naines blanches.

En plus de la relation polytropique, on peut introduire deux équations structurelles pour les intérieurs stellaires. Tout d'abord, la masse $m(r)$ incluse à l'intérieur de la couche de rayon r est reliée à la pression via la relation

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad (2)$$

De plus, dans la très grande majorité de sa vie, une étoile peut être considérée comme à l'*équilibre hydrostatique*, c'est-à-dire que les forces d'auto-gravitation de l'étoile sont contrebalancées par les forces de pression du gaz², de sorte que l'on peut écrire :

$$\frac{dP}{dr} = -\rho g \quad (3)$$

où P est la pression du gaz, ρ sa densité, g la gravité locale.

1.1 On pose $z \equiv Ar$, où A est une constante, et $w \equiv (\rho/\rho_c)^{1/n}$ où ρ_c correspond à la densité au cœur de l'étoile. Montrer que si l'on choisit A judicieusement en fonction de G , n , K et Φ_c , la nouvelle variable w répond à l'équation différentielle ordinaire suivante dite de *Lane-Emden* :

$$\frac{1}{z^2} \frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{dw}{dz} \right) + w^n = 0 \quad (4)$$

Indice : En introduisant la relation polytropique (Eq. 1) dans l'équation de l'équilibre hydrostatique (Eq. 3), montrer que

$$-K(n+1) \frac{d\rho^{1/n}}{dr} = \frac{Gm}{r^2} \quad (5)$$

Utiliser ensuite l'équation de conservation de la masse (Eq. 2) pour obtenir une équation différentielle ordinaire du second ordre faisant intervenir uniquement la fonction $\rho(r)$.

1.2 En imposant comme conditions aux bords que $w(0) = 1$ et $dw/dz(0) = 0$ (la densité tend vers une valeur constante au cœur de l'étoile), résoudre numériquement l'équation de Lane-Emden pour plusieurs indices polytropiques n entre 0 et 10. On note z_n la valeur de z correspondant à la surface de l'étoile, que l'on considérera atteinte lorsque le densité du gaz devient nulle. Quelles caractéristique remarquable possèdent les polytropes dans le cas de "grandes" valeurs de n ?

1.3 La structure interne du polytrope peut ensuite être entièrement reconstituée à partir de la connaissance de $w(z)$. Dans le cas où la constante K n'est pas connue a priori, il existe deux degrés de liberté pour les polytropes (on peut se donner par exemple une masse et un rayon total). À titre d'exemple, on pourra essayer de construire un polytrope modélisant au mieux l'intérieur du Soleil (on supposera que le Soleil est constitué d'un gaz mono-atomique, soit $\gamma = 5/3$). Donner la valeur

2. Une force de pression liée au rayonnement (pression de radiation) s'ajoute en principe à la pression du gaz mais on la négligera ici.

de la densité centrale et de la pression centrale d'un tel polytrophe. Tracer les profils de densité et de pression en fonction du rayon pour ce polytrophe.

Indice : On pourra commencer par montrer que la masse $m(r)$ comprise dans la sphère de rayon r est donnée par

$$m(r) = 4\pi\rho_c r^3 \left(-\frac{1}{z} \frac{dw}{dz} \right) \quad (6)$$

2 Masse de Chandrasekhar

Le principe d'exclusion de Pauli stipule que seulement deux fermions peuvent occuper une cellule quantique de taille h^3 (un de chaque spin). À l'intérieur des naines blanches, la densité est telle que le principe de Pauli est limitant pour la distribution des électrons libres dans le milieu : on parle alors de matière *dégénérée*. On peut montrer que l'équation d'état de l'intérieur dégénéré d'une naine blanche est proche d'une relation polytropicque. On distingue alors deux cas extrêmes :

- soit la densité centrale est suffisamment faible pour que le gaz soit non-relativiste partout. Dans ce cas, l'équation d'état est donnée par $P = K_{5/3}\rho^{5/3}$.
- soit le gaz est "complètement" relativiste (tous les électrons sont accélérés à une vitesse proche de celle de la lumière) et $P = K_{4/3}\rho^{4/3}$.

Dans ces deux cas-limites, la constante K de la relation polytropicque est fixée par l'équation d'état. On donne :

$$K_{4/3} = 2\alpha\beta^{4/3} \quad ; \quad K_{5/3} = \frac{8}{5}\alpha\beta^{5/3} \quad (7)$$

avec

$$\alpha \equiv \frac{\pi m_e^4 c^5}{3h^3} \quad (8)$$

$$\beta \equiv \frac{3h^3}{8\pi m_e^3 c^3 \mu_e m_u} \quad (9)$$

où h est la constante de Planck, c la vitesse de la lumière dans le vide, m_e la masse de l'électron, μ_e est le poids moléculaire moyen par électron libre qui vaut environ 2 pour une naine blanche (son intérieur est constitué d'hélium, de carbone et d'oxygène essentiellement) et m_u est l'unité de masse atomique.

2.1 Résoudre numériquement l'équation de Lane-Emden pour le cas des naines blanches non-relativistes et celui des naines blanches complètement relativistes.

2.2 Cette fois-ci, la valeur de K est fixée et les polytropes correspondants n'ont plus qu'un seul degré de liberté. Montrer que dans le cas des naines blanches non-relativistes, on obtient une relation masse-rayon du type $M \sim R^{-3}$. Rechercher une relation masse-rayon analogue dans le cas des naines blanches complètement relativistes. Montrer que l'on fait ainsi apparaître une masse caractéristique (connue sous le nom de *masse de Chandrasekhar*) que l'on calculera et dont on donnera une interprétation physique.

TABLE 1: Mesures observationnelles de la masse et du rayon de naines blanches (source : Madej et al. 2004).

Masse (M_{\odot})	σ_M	Rayon (R_{\odot})	σ_R
0.83	0.18	0.0100	0.0021
0.80	0.14	0.0108	0.0018
0.76	0.02	0.0107	0.0009
0.76	0.02	0.0097	0.0013
0.84	0.05	0.0107	0.0007
1.12	0.02	0.0066	0.0003
1.00	0.02	0.0084	0.0002
0.79	0.02	0.0085	0.0005
0.95	0.03	0.0087	0.0003
0.98	0.03	0.0080	0.0002
1.05	0.04	0.0075	0.0005
1.10	0.08	0.0068	0.0011

3 Relation masse-rayon des naines blanches

On a vu dans la partie précédente deux cas extrêmes pour l'équation d'état des naines blanches. Dans la pratique, l'intérieur des naines blanches est en fait partiellement relativiste. L'équation d'état d'un tel milieu peut être calculée à partir de la relativité restreinte. Elle ne correspond plus à une relation polytropicque, mais la pression s'exprime toujours en fonction de la densité indépendamment de la température. L'équation d'état est donnée par

$$P(r) = \alpha f [x(\rho)] \quad (10)$$

où

$$x = \beta \rho^{1/3} \quad (11)$$

et

$$f(x) = x(2x^2 - 3)\sqrt{x^2 + 1} + 3 \ln \left[x + \sqrt{x^2 + 1} \right] \quad (12)$$

On rappelle que les valeurs de α et β sont données par les Eq. 8 et 9.

3.1 En incorporant les Eq. 10 à 12 dans les équations de structure 2 et 3, établir un système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre en $m(r)$ et $\rho(r)$. Le résoudre numériquement en considérant différentes valeurs pour la densité centrale ρ_c . Pour chacune de ces valeurs, calculer la masse totale du modèle et son rayon (comme précédemment, on définira la surface du polytrophe comme le lieu où la densité s'annule).

3.2 On donne dans le tableau 1 les masses et rayons des naines blanches pour lesquelles ces grandeurs ont pu être mesurées observationnellement, indépendamment de modèles stellaires. Comparer la relation masse-rayon des naines blanches obtenue dans la question précédente à la relation observationnelle. On pourra aussi ajouter comme référence visuelle les deux cas extrêmes étudiés dans la partie 2 (cas non-relativiste et cas complètement relativiste).

4 Effets d’une théorie de gravitation modifiée

Les observations les plus récentes montrent que l’expansion de l’univers n’est pas constante, mais qu’elle s’accélère. Pour rendre compte de cette expansion accélérée dans le cadre de la physique classique (la relativité générale d’Einstein), deux solutions ont été avancées. La première consiste à introduire une nouvelle forme d’énergie, dite *énergie noire* aux propriétés différentes de celle de la matière habituelle. La seconde suppose une modification de la gravité aux grandes échelles (modèles dits de *gravité modifiée*). Le problème de ces théories est que de telles modifications entraînent également des perturbations aux petites échelles, qui entrent en contradiction avec les observations bien contraintes à l’échelle du système solaire. Des modèles de gravitation modifiée ont dès lors été construits en incorporant un mécanisme d’*écranage* qui rend les modifications très faibles aux petites échelles tout en gardant un comportement différent de la relativité générale aux grandes échelles. Le mécanisme de Vainshtein en est un exemple. Il a été montré récemment que dans certains modèles, le mécanisme d’*écranage* de Vainshtein n’est pas total à l’intérieur des étoiles et peut avoir des signatures observationnelles (Koyama & Sakstein 2015). En particulier, une conséquence de cet *écranage* partiel est qu’il induirait une modification de l’équilibre hydrostatique dans les étoiles, sous la forme :

$$\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{Gm}{r^2} - \frac{\Upsilon}{8} G\rho \frac{d^2m}{dr^2} \quad (13)$$

où Υ est un paramètre libre quantifiant l’importance de la modification de la gravité. Plusieurs modèles de gravité modifiée nécessitent des valeurs de Υ de l’ordre de l’unité. L’idée est d’utiliser des contraintes provenant de la physique stellaire pour tester si une modification de l’équilibre hydrostatique de cette intensité est compatible avec les observations.

4.1 Résoudre numériquement les équations de la structure stellaire en substituant l’Eq. 13 à l’Eq. 3. Comme dans la partie 3, on considérera plusieurs valeurs pour la densité centrale ρ_c et on calculera systématiquement la masse et le rayon du modèle correspondant. On obtiendra ainsi une nouvelle relation masse-rayon que l’on comparera à la relation masse-rayon observationnelle des naines blanches. Donner ainsi une estimation approximative de la valeur maximale pour Υ tolérée par les observations.