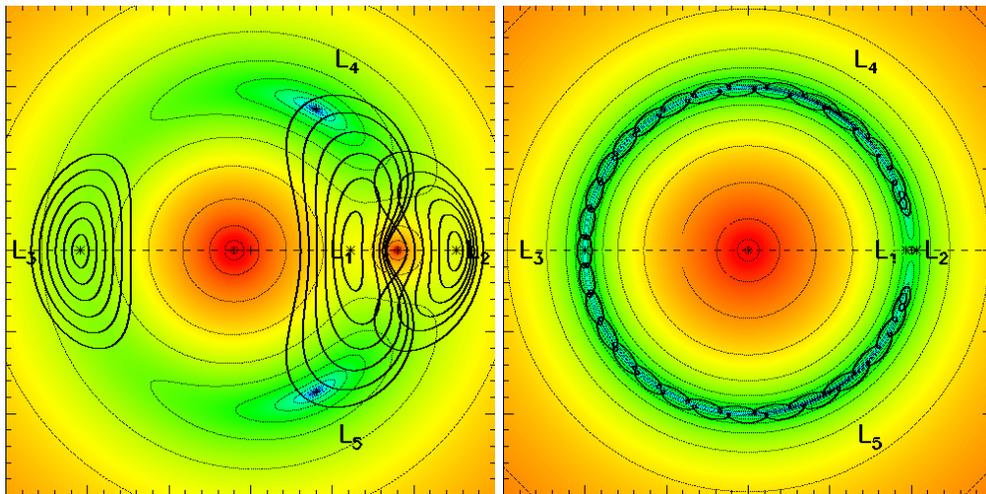


# Problèmes gravitationnels à 2 et 3 corps

Le but du présent projet est d'étudier le mouvement d'une masse ponctuelle dans le champ de gravitation généré par 1 ou 2 autres corps massifs. Les équations du mouvement sont des équations aux dérivées ordinaires (EDO) qu'il faudra résoudre numériquement. Certaines parties font également appel à la détermination de zéros d'une fonction, et à des méthodes de tir.

Les différents aspects présentés dans ce sujet correspondent à plusieurs propositions d'études. Il est laissé à la liberté des étudiants de choisir quelle (ou quelles) partie(s) ils préfèrent approfondir, et éventuellement de s'orienter vers des sujets connexes.



## 1 Problème de Kepler simple

Avant tout autre étude complexe, il est important de tester les méthodes développées sur des cas connus. Ici par exemple, il est proposé d'étudier le cas du problème de Kepler simple, où une masse ponctuelle orbite dans le potentiel d'un astre de masse  $M$ . Les orbites sont alors planes et décrites par la famille des coniques.

Après normalisation des distances par  $r_g = GM/c^2$  et des temps par  $\tau = r_g/c$ , l'équation du mouvement en 2D, dans le plan orbital, peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\partial_x \Phi \\ \ddot{y} &= -\partial_y \Phi\end{aligned}$$

où  $\Phi(x, y) = -1/r = -(x^2 + y^2)^{-1/2}$  est le potentiel gravitationnel de l'astre massif.

- Retrouver les formules sans dimension précédentes.
- Écrire un programme qui résout ces équations à partir de conditions initiales données.
- Pour des orbites de différentes excentricités, comparer les trajectoires obtenues avec les résultats théoriques et analyser les sources d'erreur.
- Tester et comparer plusieurs méthodes numériques. En déduire la méthode la plus adaptée.
- Afin d'améliorer encore l'efficacité de ces méthodes, implémenter un pas adaptatif. En quoi le choix  $\delta t \propto r^{3/2}$  est-il particulièrement intéressant ?

## 2 Problème circulaire à 3 corps restreint

Une fois la méthode numérique testée et éprouvée, il est maintenant possible de résoudre des équations plus complexes, en particulier le problème circulaire à trois corps restreint. Dans ce problème, on considère le mouvement d'une particule ponctuelle de très faible masse dans le potentiel généré par deux corps massifs de masse  $m_1$  et  $m_2$  en orbite circulaire l'un autour de l'autre. Les deux astres sont séparés par une distance  $a$  et orbitant l'un autour de l'autre à la vitesse  $\Omega$ . Ces deux quantités sont reliées par la 3e loi de Kepler :  $a^3\Omega^2 = GM$  (où  $M = M_1 + M_2$  est la masse totale du système).

Les propriétés topologiques du champ de force sont alors uniquement déterminées par le rapport de masse  $\mu_1 = M_1/M$  (on définit aussi  $\mu = \mu_2 = M_2/M$ , si bien que  $\mu_1 + \mu_2 = 1$ ). Dans la suite, on supposera sans perte de généralité que l'astre 1 est le plus massif des deux ( $\mu = \mu_2 < 0.5$ ).

Pour simplifier la compréhension, on se place dans le repère barycentrique qui tourne avec les deux astres. Dans ce repère tournant, les deux astres principaux ont des positions fixes qu'on utilise pour définir l'axe  $x$ . Ces positions sont repérées par  $x_1$  et  $x_2$ . Dans ce repère, la particule est soumise à la gravité des deux astres, mais aussi à la force centrifuge (qui dérive d'un potentiel) et à la force de Coriolis (qui ne dérive pas d'un potentiel).

### 2.1 Puits de potentiel

Dans le repère tournant, et après normalisation des distances par  $a$  et des temps par  $\tau = 1/\Omega$ , on trouve que les coordonnées des deux astres sont  $x_1 = -\mu_2$ ,  $x_2 = \mu_1$ , et que les équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 2\dot{y} - \partial_x \Phi \\ \ddot{y} &= -2\dot{x} - \partial_y \Phi\end{aligned}$$

Le potentiel effectif est ici défini comme :

$$\Phi(x, y) = - \left( \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} + \frac{r^2}{2} + \frac{\mu_1\mu_2 - 3}{2} \right)$$

où  $r_1^2 = (x - x_1)^2 + y^2$ ,  $r_2^2 = (x - x_2)^2 + y^2$  et  $r^2 = x^2 + y^2$  correspondent respectivement aux distances aux deux astres massifs et au centre de gravité du système.

Ce potentiel possède 5 points particuliers que l'on appelle les points de Lagrange. Ils correspondent à des points d'équilibre statique du système.

- Les points  $L_4$  et  $L_5$  sont des maxima (locaux et globaux) du potentiel. Ils sont situés en dehors de l'axe reliant les deux astres. On peut montrer que leurs coordonnées et le potentiel en ces points sont :

$$\begin{aligned}x_{L_4/L_5} &= 1/2 - \mu \\ y_{L_4/L_5} &= \pm\sqrt{3}/2 \\ \Phi_{4/5} &= 0\end{aligned}$$

- Les points  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$  sont des points-selle du potentiel. Ils sont sur l'axe qui relie les deux planètes (points dits *colinéaires*). Lorsque le rapport de masse est très faible ( $\mu_2 \ll 1$ ), leurs coordonnées sont données par :

$$\begin{aligned}x_{L_1/L_2} &\approx 1 \pm \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} & x_{L_3} &\approx -1 - \frac{5}{12}\mu \\ y_{L_1/L_2} &= 0 & y_{L_3} &= 0 \\ \Phi_{1/2} &\approx -\frac{9}{2}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3} & \Phi_3 &\approx -\mu\end{aligned}$$

- Retrouver les formules sans dimension de la force et du potentiel.
- Représenter ce potentiel dans le plan  $(x, y)$  avec une palette de couleurs et/ou avec des contours par exemple.
- Identifier les 5 points d'équilibre de ce potentiel.

## 2.2 Position des points de Lagrange colinéaires

La position des points de Lagrange colinéaires ne possède pas de formule analytique exacte et doit être calculée numériquement.

- Écrire un programme qui calcule les positions  $x_{L_1}(\mu)$ ,  $x_{L_2}(\mu)$  et  $x_{L_3}(\mu)$  des points  $L_1$ ,  $L_2$ , et  $L_3$ , ainsi que les valeurs  $\Phi_1(\mu)$ ,  $\Phi_2(\mu)$ ,  $\Phi_3(\mu)$  du potentiel en ces points. Vérifier que  $\Phi_2 \lesssim \Phi_1 < \Phi_3 < 0$ . Comparer ces résultats aux valeurs asymptotiques obtenues pour  $\mu \ll 1$ .

## 2.3 Trajectoires dans le champ de force des 2 astres

### 2.3.1 Cas général

- Écrire un programme qui résout les équations du mouvement dans le champ de force des deux astres.
- L'énergie totale d'une particule vaut :  $E = E_k + \Phi$ , où  $E_k = (\dot{x} + \dot{y})/2$  est l'énergie cinétique. Elle est bien évidemment une constante du mouvement (elle est reliée à la constante de Jacobi  $C_J = 3 - 2E$ ). Vérifier la conservation de l'énergie ou cours des trajectoires.
- Représenter les trajectoires obtenues dans le repère tournant, pour différentes conditions initiales. Les représenter également dans le repère fixe.
- Visuellement, on pourra essayer de superposer ces trajectoires à l'image du puits de potentiel. On pourra aussi superposer la courbe de vitesse nulle définie comme l'iso-potentielle  $\Phi = E$ .
- Étudier la stabilité statique des différents points de Lagrange. On comparera notamment la stabilité des points  $L_4$  et  $L_5$  pour  $\mu < \mu_c$  et  $\mu > \mu_c$  avec  $\mu_c = (27 - \sqrt{621})/54 \approx 0.0385$ .
- Comparer la nature des solutions pour différents points de départ, et pour des énergies initiales  $E < \Phi_{1/2}$ ,  $\Phi_{1/2} < E < \Phi_3$ ,  $\Phi_3 < E < \Phi_{4/5}$ , et  $\Phi_{4/5} < E$ .

L'étude du mouvement dans ce champ de force est fortement non-linéaire. Il présente une très grande variété de trajectoires différentes, dont beaucoup illustrent les caractéristiques chaotiques du système à trois corps. Cependant, il existe des familles d'orbites liées que l'on pourra essayer d'observer.

### 2.3.2 Méthode des tirs pour les orbites fermées

Il est particulièrement intéressant d'étudier les orbites fermées dans ce puits de potentiel complexe. En général, il n'est pas aisé de les mettre en évidence car elles correspondent à des conditions initiales très spécifiques. Comme pour toute trajectoire, ces conditions sont au nombre de 4, mais il est ici nécessaire de les déterminer très précisément. Les orbites qui traversent perpendiculairement l'axe  $y = 0$  sont parmi les moins difficiles à mettre en évidence. Par définition, elles vérifient  $v_x = 0$  en  $y = 0$ . Pour les identifier, on pourra procéder de la manière suivante :

- On se fixe un point de l'axe  $x : (x_0, y_0 = 0)$  par lequel l'orbite va passer (2 conditions).
- On impose que  $v_x^0 = 0$  en ce point de départ (1 condition)
- La dernière condition est en principe déterminée par le fait que  $v_x = 0$  à nouveau quand la trajectoire re-coupe l'axe  $x$ . Mais il n'est pas possible de la fixer directement. On procède donc par la méthode des tirs. Pour cela, on suppose un  $v_y^0$  donné. On intègre la trajectoire jusqu'à re-traverser l'axe  $x$ . On mesure  $v_x$ . On ajuste ensuite le  $v_y^0$  de manière à obtenir un  $v_x$  plus petit sur l'axe. Et on réitère jusqu'à ce que  $v_x$  devienne suffisamment petit. Une trajectoire fermée a alors été obtenue.
- Pour obtenir de nouvelles trajectoires, on recommence avec un  $x_0$  différent. Le plus simple pour cela, est de ne changer que peu la valeur de  $x_0$ , et de partir avec la valeur précédente de  $v_y^0$  comme nouvelle valeur de départ.

Selon le temps à disposition et l'intérêt des étudiants, on pourra étudier certaines familles d'orbites particulières qui sont présentées ci-dessous.

### 2.3.3 Orbites de Lyapunov

Bien que les points de Lagrange colinéaires  $L_1$ ,  $L_2$ , et  $L_3$  soient instables statiquement (point-selle du potentiel), la force de Coriolis permet l'existence d'orbites fermées périodiques autour de ces points. Les orbites fermées confinées au plan  $(x, y)$  sont appelées *orbites de Lyapunov* (voir fig. 1).

- Mettre en place la méthode de tirs en déterminant à la main la valeur de  $v_y^0$  qui permet d'obtenir une première orbite fermée pour un  $x_0$  donné.
- Modifier le programme de départ afin d'automatiser cette procédure pour affiner la valeur de  $v_y^0$  précédente et trouver d'autres orbites.
- Représenter plusieurs orbites de Lyapunov autour des 3 points de Lagrange colinéaires (il est plus facile de les visualiser pour des valeurs assez grandes du rapport de masse).
- Que pouvez vous dire de la stabilité de ces orbites ?

### 2.3.4 Orbites en fer à cheval (Horseshoe)

Il existe également des orbites (fermées ou non) dites en *fer à cheval*, dans lesquelles les particules se déplacent autour de l'ensemble des points  $L_3$ ,  $L_4$  et  $L_5$  et qui coupent l'axe  $x$  à proximité du point  $L_3$  (voir fig. 2). Les orbites ne peuvent avoir une forme de fer à cheval que si elles ont l'énergie suffisante pour passer par le point  $L_1$ . A l'inverse, les orbites trop énergétiques quittent très facilement le puits de potentiel global. Au bilan, il est donc préférable de se concentrer uniquement sur les conditions initiales qui assurent que  $\Phi_1 < E$  et  $E$  pas trop grand. De même, ces orbites sont plus faciles à identifier pour de faibles rapports de masse ( $\mu < 10^{-4}$ ).

- Mettre en place la méthode de tirs en déterminant à la main à la valeur de  $v_y^0$  qui permet d'obtenir une première orbite fermée pour un  $x_0$  donné.
- Modifier le programme de départ afin d'automatiser cette procédure pour affiner la valeur de  $v_y^0$  précédente et de trouver d'autres orbites.
- Représenter plusieurs orbites en fer à cheval.

### 2.3.5 Orbites têtard (tadpole)

Bien que les points  $L_4$  et  $L_5$  correspondent à des points instables (maximum du potentiel), la force de Coriolis permet l'existence d'orbites (fermées ou non) piégées dans leur voisinage. Selon leur amplitude, elles s'étendent plus ou moins loin des points  $L_4$  et  $L_5$ , formant des orbites plus ou moins allongées.

- On pourra essayer de représenter certaines de ces orbites.

### 2.3.6 Orbites en 3 dimensions (difficile)

Lorsque l'on prend en compte un éventuel mouvement vertical le long de l'axe  $z$ , on observe des modifications dans les orbites mentionnées précédemment. En particulier, les orbites de Lyapunov autour des points de Lagrange colinéaires bifurquent et donnent naissance à des orbites 3D dites *de halo* (homéomorphes à des cercles) et *de Lissajou* (homéomorphes à des huites et passant par le point de Lagrange considéré).

- Rajouter la troisième dimension  $z$  aux équations du mouvement.
- Écrire un programme qui résout les équations du mouvement en 3 dimensions.
- Par la méthode des tirs décrite précédemment, trouver et représenter des exemples d'orbites de halo et de Lissajou.