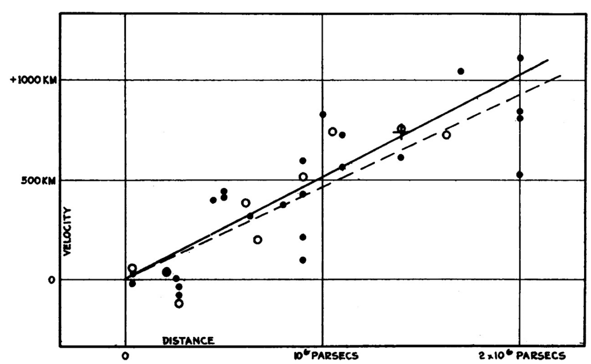
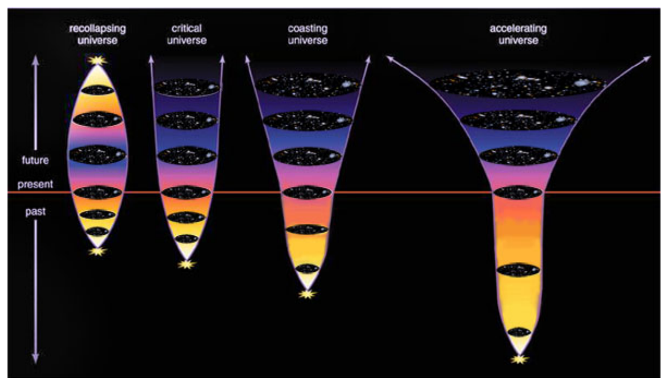
Expansion de l'Univers et Quintessence

La cosmologie moderne commence réellement à la fin des années 20 avec une série de deux articles par Lemaître (1927) et Hubble (1929) qui montrent que les objets de l'univers proche s'éloignent de nous à une vitesse d'autant plus grande que ces objets sont distants :

$$v = H_0 d$$

La constante H_0 porte maintenant le nom de *constante de Hubble* et vaut environ $H_0 = 70$ km/s/Mpc. Cette observation montre que l'univers n'est pas statique mais connaît une expansion (actuellement). Elle pose donc directement la question du passé et du futur de l'univers.





Les observations les plus récentes semblent maintenant montrer que l'expansion de l'univers n'est pas constante, mais qu'elle s'accélère. Cette expansion accélérée ne peut être expliquée dans le cadre de la physique classique (la relativité générale d'Einstein) que si l'on suppose l'existence d'une forme d'énergie nouvelle, différente de la matière habituelle. Sa nature exacte restant pour l'instant un mystère, elle est souvent appelée *énergie noire*. Différents modèles d'énergie noire ont été proposés (par exemple une constante cosmologique).

Ce projet propose d'étudier un modèle simple où l'accélération de l'expansion est due à une quantité appelée la *quintessence*. Les équations qui régissent l'évolution de l'univers sont des équations différentielles ordinaires qu'il faudra résoudre numériquement.

Théorie et questions préliminaires

Temps sans dimension

La constante de Hubble donne naturellement une estimation de l'âge de l'univers : $1/H_0 = 14 \times 10^9$ ans. Pour simplifier les calculs, nous utiliserons un temps sans dimension τ relié au temps réel par $\tau = H_0 t$. Sauf mention contraire, tous les temps et les dérivées seront exprimés par rapport à ce temps sans dimension.

Facteur d'échelle

Pour caractériser l'évolution de l'univers, on utilise souvent le *facteur d'échelle* (ou facteur d'expansion) $a(\tau)$. Celui-ci est définit comme le rapport de la distance d entre deux objets à un instant de l'histoire de l'univers à la distance d_0 entre ces même objets à l'heure actuelle :

$$d(\tau) = d_0 \; a(\tau) \tag{1}$$

- Montrer qu'à l'époque actuelle τ_0, on a $a_0 = 1$.
- En utilisant la loi de Hubble, montrer qu'à l'époque actuelle $\dot{a}_0 = \left(\frac{da}{d\tau}\right)_0 = 1$.

Ces valeurs serviront à déterminer les constantes d'intégration lors de la résolution des équations différentielles.

Équation d'évolution

La relativité générale permet de décrire l'évolution de $a(\tau)$ grâce à une équation dite de *Friedman-Lemaître* :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \sum_i \rho_i + \Omega_K \tag{2}$$

Ici, Ω_K est une constante reliée à la courbure de l'espace-temps. Dans la suite, on s'intéressera au cas particulier d'un univers plat ($\Omega_K = 0$) favorisé par les observations. Les quantités $\rho_i c^2$ sont les densités d'énergie des différentes espèces présentes dans l'univers (matière froide, matière chaude, photons, constante cosmologique, quintessence etc...), normalisées à la densité critique $\rho_c = (3H_0^2)/(8\pi G)$. Dans la suite on notera $\rho = \sum_i \rho_i$ la densité totale.

Lorsque l'univers s'expand, les densités ρ_i des différentes espèces évoluent d'une manière qui dépend de leurs propriétés, et en particulier de leur équation d'état. Par exemple, la densité de matière froide décroit comme $\rho_{\mathrm{CM}} \propto a^{-3}$. À elle seule, cette équation différentielle ne permet pas pas de déterminer le comportement de l'univers, et il est nécessaire de décrire par des équations additionnelles l'évolution de la densités.

- Avec les normalisation choisies, que vaut la densité totale $\rho_0 = \rho(\tau_0)$ à l'époque actuelle ?

Refroidissement adiabatique

L'univers étant un système isolé, il subit une expansion adiabatique. La variation de l'énergie $E = \rho c^2 V$ contenue dans un volume $V \propto a^3$ est donc due au seul travail des forces de pression $-PdV$.

- En analysant ce bilan énergétique, montrer que la variation temporelle de la densité $\dot{\rho}$ d'un univers en expansion est donnée par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + P/c^2\right) \tag{3}$$

  où $P = \sum_i P_i$ est la pression totale de tous les constituants.
- En dérivant l'équation d'évolution (Eq. 2), en déduire que l'équation d'évolution de l'univers peut alors se réécrire sous la forme : $\ddot{a} = -a(\rho + 3P/c^2)/2$. Conclure que pour n'importe quel fluide classique qui satisfait les conditions $\rho \geq 0$, $P \geq 0$, l'accélération est toujours négative, ce qui traduit un univers en **expansion ralentie**.

Les observations récentes montrent un univers en **expansion accélérée**, ce qui nécessite une autre forme d'énergie, différente de ces formes bien connues, on parle d'énergie noire.

Équations d'état

L'équation du refroidissement fait intervenir une nouvelle variable : la pression totale P, somme des pressions individuelle des différentes espèces. Chaque espèce possède une équation d'état propre qui relie sa pression P_i à sa densité ρ_i. En pratique, on caractérise cette équation d'état par le paramètre :

$$w_i = \frac{P_i}{\rho_i c^2} \tag{4}$$

de manière à ce que $P_i = w_i \rho_i c^2$. Ainsi par exemple, l'équation d'état de la matière froide est $P_{\mathrm{CM}} = 0$ (c'est à dire $w_{\mathrm{CM}} = 0$), celle des photons est $P_{\mathrm{light}} = \rho_{\mathrm{light}} c^2/3$ (c'est à dire $w_{\mathrm{light}} = 1/3$), celle d'une constante cosmologique est $P_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2$ (c'est à dire $w_\Lambda = -1$)... .

- Pour les espèces dont le paramètre w_i est constant, l'équation du refroidissement adiabatique peut s'intégrer analytiquement. Montrer alors que $\rho_i = \rho_{i,0} a^{-3(1+w_i)}$. Comment évolue la densité dans les cas particuliers de la matière froide ($w_{\rm CM} = 0$) et et d'une constante cosmologique ($w_\Lambda = -1$) ?
- Si l'on suppose qu'il n'existe qu'un seul constituant de w_i est constant, alors l'équation de Friedman-Lemaître peut aussi s'intégrer analytiquement. Intégrer cette équation pour une constante cosmologique ($w_\Lambda = -1$), et montrer que dans ce cas $\rho_0 = 1$ et $a = e^\tau$, c'est à dire que l'univers connaît une croissance accélérée exponentiellement [1].

Quintessence

Les observations semblent montrer qu'à l'époque actuelle τ_0, $w_0 \approx -1$ ce qui explique le succès des modèles avec constante cosmologique. Cependant, il n'y a pas de raison que l'énergie noire possède une équation d'état de w constant et des modèles plus récents autorisent la possibilité d'un w qui évolue dans la temps. Des considérations compliquées de physique des champs montrent que le modèle le plus simple correspond à des densité et pression qui sont paramétrisées par l'intermédiaire d'un nouveau champ scalaire ϕ :

$$\rho_q = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + U(\phi) \tag{5}$$

$$P_q/c^2 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - U(\phi). \tag{6}$$

où $U(\phi)$ est un potentiel indéterminé. On parle de modèle de **quintessence**. La première de ces deux équations montre que l'on peut interpréter la densité d'énergie de la quintessence comme l'énergie mécanique d'un système dynamique (somme d'une énergie potentielle U et d'une énergie cinétique $\dot{\phi}^2/2$).

- Montrer que, dans le cadre de ce modèle, l'équation du refroidissement permet de déterminer une équation d'évolution du champ scalaire :

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} + \frac{dU}{d\phi} = 0 \tag{7}$$

- Sans calcul, en déduire que pour un univers en expansion ($\dot{a} > 0$), ce système évolue vers un équilibre statique au fond du potentiel $U(\phi)$ (s'il a un fond).
- Montrer que, lorsque cet équilibre est atteint : $w_q = -1$, et s'il n'y a pas d'autre constituant $\dot{a}/a = \gamma$ est constant et l'expansion est accélérée : $a = e^{\gamma\tau}$. Ce genre de modèles tend donc naturellement vers un état en expansion accélérée.

Dans ce projet on s'intéressera au cas le plus simple d'un potentiel harmonique :

$$U(\phi) = \frac{1}{2}\omega_0^2\phi^2 + \rho_{eq}$$

où $0 < \rho_{\rm eq} < 1$ et ω_0 sont des constantes (attention, ne pas confondre ω_0 avec w_0).

- Montrer que dans ce cas, l'équation qui régit l'évolution du champ scalaire est :

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} + \omega_0^2\phi = 0 \tag{8}$$

- Montrer que pour résoudre cette équation, les conditions initiales a_0, $\dot{a}_0$ ne suffisent pas. Si l'on se fixe une condition supplémentaire $-1 < w_0 = w_q(\tau_0) < -0.9$, montrer que, dans le cas d'un univers uniquement constitué de quintessence, les conditions initiales sur ϕ sont :

$$\phi_0^2 = \frac{1 - w_0 - 2\rho_{\rm eq}}{\omega_0^2} \qquad \text{avec} \quad \rho_{\rm eq} < (1 - w_0)/2$$

$$\dot{\phi}_0^2 = 1 + w_0$$

1. De la même manière, on peut montrer facilement que si $w_i > -1$, alors $a(\tau) = (1 + \tau - \tau_0)^{\frac{2}{3(1+w_i)}}$

Travail numérique

Premiers tests

Afin de tester les méthodes numérique, on s'intéresse dans un premier temps au comportement asymptotique de ces équations avec quintessence lorsque $\dot{a}/a$ devient constant. On notera $\dot{a}/a = 2\alpha\omega_0/3$ cette constante. Dans ce cas, l'équation sur le champ scalaire (Eq. 8) possède des solutions analytiques qui permettent de tester les solutions numériques.

- Écrire un programme qui résout numériquement cette équation.
- Pour plusieurs valeurs de α et plusieurs jeux de conditions initiales ϕ_0, $\dot{\phi}_0$ **arbitraires** (et indépendantes de w_0), enregistrer les solutions numériques dans un fichier et les comparer aux solutions analytiques.

Univers de quintessence pure

- Écrire un programme qui résout l'évolution exacte d'un univers de quintessence (Eq. 2 et 8) pour le jeu de conditions initiales ϕ_0 et $\dot{\phi}_0$ déterminées précédemment.
- Utiliser ce programme pour intégrer ces équations dans le futur et surtout dans le passé.
- Enregistrer l'évolution des différentes quantités $a(\tau)$, $\phi(\tau)$, $P(\tau)$, $\rho(\tau)$ et $w(\tau)$ dans un fichier et les tracer avec gnuplot.
- Étudier les solutions pour différentes valeurs de ω_0 et ρ_{eq}.
- Lorsque cela est possible, mesurer en particulier l'âge de l'univers, ainsi que ses variations en fonction des paramètres.

Univers de quintessence et de matière froide

On s'intéresse maintenant au cas où l'univers est constitué non seulement de quintessence, mais aussi de matière froide pour laquelle $P_{\text{CM}} = 0$ (c'est à dire $w_{\text{CM}} = 0$).

- Sachant qu'à l'époque actuelle ($\tau = \tau_0$) la contribution de la matière froide ρ_{CM} est environ la moitié de celle de la quintessence ρ_{q} ($\rho_{\text{CM},0} = \rho_{\text{q},0}/2$), en déduire les nouvelles conditions initiales sur ϕ.
- Modifier le programme pour prendre en compte cette présence additionnelle de matière froide.
- Étudier les solutions de ce modèle.
- Lorsque cela est possible, mesurer en particulier l'âge de l'univers, ainsi que ses variations en fonction des paramètres.