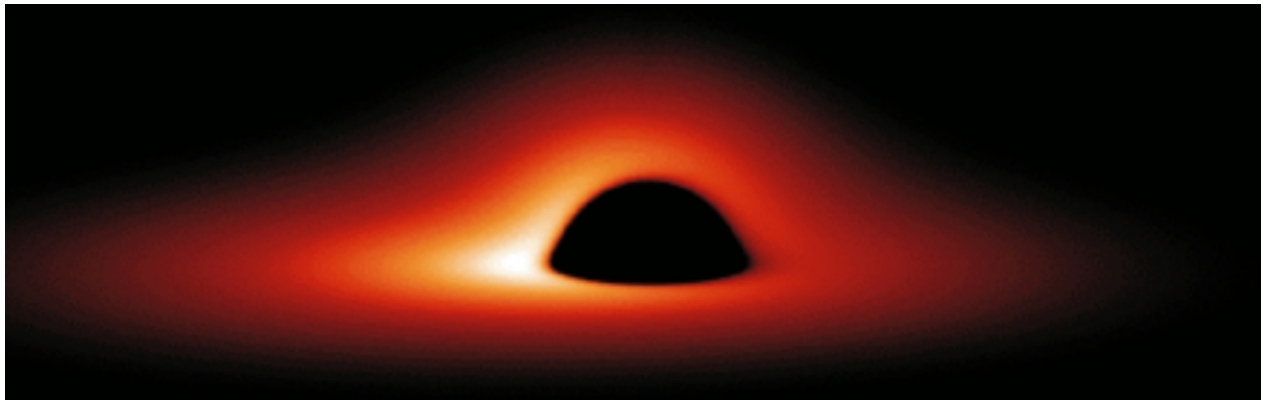


Images d'un trou noir

Les étoiles vivent souvent en couple. On parle alors d'étoiles binaires. Lorsqu'une étoile arrive en fin de vie et n'a plus de combustible à brûler, elle implose et, si elle est suffisamment massive, forme un trou noir. Si l'autre étoile n'a pas été expulsée au cours de ce violent événement, il en résulte un système binaire constitué d'une étoile classique et d'un trou noir. On parle alors de *binaire X*. Le potentiel gravitationnel du trou noir est suffisamment fort pour *aspirer* la matière de l'étoile compagne. Cette matière spirale alors autour du trou noir, et forme ce qu'on appelle un disque d'accrétion. Bien qu'aucune lumière ne puisse s'échapper du trou noir à proprement parler, les disques d'accrétion sont très lumineux, et émettent essentiellement en rayonnement X.

Le but de ce projet est de modéliser les images et les spectres que l'on observerait de ces disques d'accrétion autour de trous noirs. Dans un univers newtonien, les photons se propagent en ligne droite. Vu avec un certain angle d'inclinaison, un disque ressemble toujours à une ellipse d'autant plus excentrique que l'on observe le disque par la tranche. Cependant, la présence du trou noir modifie significativement l'espace-temps dans son voisinage, et altère la trajectoire des photons. Ceux-ci ne se déplacent plus en ligne droite, et l'image du disque d'accrétion s'en trouve modifiée (voir image ci-dessous). L'énergie des photons est également modifiée, si bien que le spectre observé est différent de celui émis par le disque dans son propre référentiel. Ce projet permet de décrire, dans une approche numérique, ces effets et de faire des prédictions en imagerie et en spectroscopie.



1 Les géodésiques

Dans un premier temps, il nous faut étudier les trajectoires des photons (on parle de géodésiques). On s'intéresse ici à un trou noir *Schwarzschild* (sans rotation) de masse M . Comme en mécanique newtonienne, les trajectoires sont toujours dans un plan. On les repère en coordonnées polaires (r, θ) . Les géodésiques sont alors décrites par l'équation différentielle non-linéaire du premier ordre suivante :

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \theta} \right]^2 + \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) = \frac{1}{b^2}$$

où b désigne le paramètre d'impact à l'infini et $r_s = 2GM/c^2$ est appelé le rayon de Schwarzschild.

- Réécrire cette équation en utilisant les variables sans dimension : $u = r_s/r$ et $u_c = b_c/b$ avec $b_c = 3\sqrt{3}r_s/2$. Montrer qu'on peut la mettre sous la forme $(\partial u/\partial \theta)^2 = f(u)$.
- Analyser qualitativement cette équation (vous pourrez tracer la fonction $f(u)$), et montrer qu'il y a deux familles de solutions. Pour $b > b_c$, les photons sont déviés par le trou noir et repartent à l'infini. Pour $b < b_c$, les photons tombent sur le trou noir après avoir éventuellement fait plusieurs tours...
- Pour résoudre numériquement cette équation non linéaire, il est plus aisé de travailler avec l'équation dérivée. Montrer que cette équation est :

$$u'' = \frac{3}{2}u^2 - u$$

Résoudre numériquement cette équation en fonction du paramètre d'impact, et vérifier votre analyse qualitative.

2 Propriétés observables du trou noir

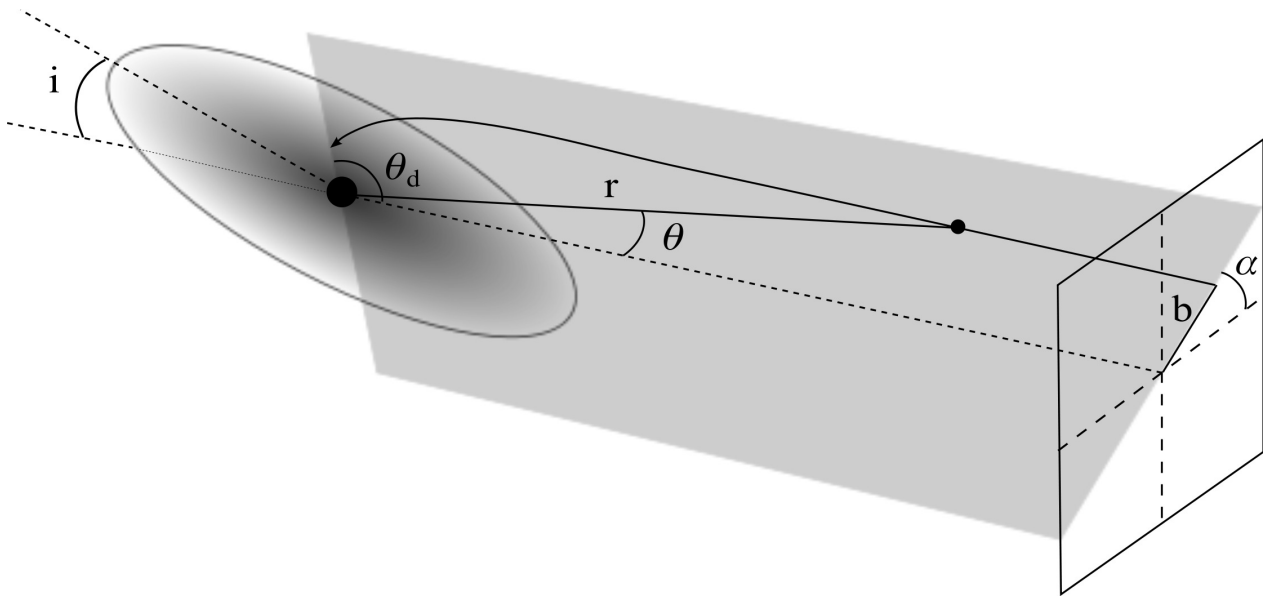


FIGURE 1 – Dans le plan de la trajectoire, le photon est repéré par ses coordonnées polaires (r, θ) . L'angle $\theta = 0$ est choisi comme la direction de l'observateur. Un photon quitte le disque avec un rayon r_0 et un angle θ_d . Il arrive sur le détecteur avec un paramètre d'impact b , et un angle α . Le disque est incliné d'un angle i par rapport à la direction d'observation.

2.1 Forme du disque d'accrétion

Maintenant que nous connaissons la manière dont se propagent les photons, il est possible d'étudier les images d'un disque d'accrétion autour du trou noir. Pour cela, il faut, pour chaque point du disque suivre la trajectoire des photons jusqu'à ce qu'ils arrivent sur le détecteur d'un observateur. Pour les trous noirs de Schwarzschild, le principe de retour inverse de la lumière est valide. Il est donc aussi possible de partir du détecteur et de suivre les géodésiques jusqu'à tomber sur le disque à un rayon r . Dans les deux cas, un peu de géométrie en trois dimensions s'impose... Les relations de trigonométrie montrent qu'un photon qui arrive sur le détecteur avec un angle α est parti du disque avec un angle θ_d tel que :

$$\cos \theta_d = \frac{-\sin \alpha \cos i}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha \cos^2 i}}$$

- Tracer la forme $r(b, \alpha)$ des iso-rayons observés sur le détecteur pour différentes inclinaisons d'un disque d'accrétion.
- Étudier la forme des images primaires et secondaires.
- Sachant que la trajectoire rectiligne de photons non déviés a pour équation : $r(\theta) = b/\sin \theta$, comparer les iso-rayons obtenus avec les géodésiques exacte, et ceux obtenus dans l'approximation newtonienne.
- Éventuellement, optimiser le programme afin a) de ne calculer les géodésique que sur un demi-plan du détecteur, et b) ne calculer les rayons correspondant à toutes les valeurs de α en n'intégrant qu'une seule géodésique par valeur de b .

2.2 Luminosité du disque d'accrétion

Le modèle standard des disques d'accrétion (modèle de disque α) permet (moyennant certaines approximations) de déterminer les profils de vitesse, densité, température etc du disque. Le disque émet un rayonnement de corps noir dont le flux (energie/temps/surface/angle solide) vaut : $F = \sigma T^4$ (où σ est la constante de Stephan, et T la température efficace du milieu). Le disque étant plus chaud dans les parties internes, il émet un rayonnement plus intense. Les modèles prédisent finalement que le flux émis par le disque à un rayon r du trou noir est :

$$\frac{F_{\text{emis}}(x)}{F_0} = \frac{x^{-3}}{1 - 1/(2x)} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{\frac{1}{8x}} \ln \left(\frac{\sqrt{2x} + 1}{\sqrt{2x} - 1} \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \right) \right]$$

avec $F_0 = \frac{3}{4} \frac{\dot{m} c^2}{4\pi r_s^2} = \frac{3}{2} \frac{\dot{m} GM}{4\pi r_s^3}$ et $x = r/(3r_s) > 1$.

Cette luminosité n'est pas directement celle observée. En effet, cette luminosité émise dans le référentiel du gas en rotation est altérée par les les effet de relativité restreinte (effet Doppler cinématique qui se réduit à $z \approx v/c$ pour des vitesse faibles) et de relativité général (effet Doppler gravitationnel). Ces deux effets sont caractérisés par une unique quantité, *redshift* $z = \Delta\nu/\nu$ qui caractérise le décalage en fréquence des photons entre l'émission et la réception. Les calculs de relativité montrent que les photons émis à un distance $x = r/(3r_s)$ du centre du disque, arrivant sur le détecteur avec un paramètre d'impact b , et un angle α , possèdent un redshift de :

$$1 + z = \frac{1}{\sqrt{1 - 1/(2x)}} \left[1 + (2x)^{-3/2} \frac{b}{b_c} \cos i \cos \alpha \right]$$

- Sachant que, loin du trou noir ($r \gg r_s$), la vitesse de rotation du disque est $v \approx (2r/r_s)^{-1/2}c$, vérifier analytiquement que pour $\alpha = 0$, $i = 0$, on retrouve redshift $|z| \approx v/c$.
- Tracer la carte $z(b, \alpha)$ des redshifts correspondant aux photons émis depuis un disque en rotation, s'étendant de $r_{\min} = 3r_s$ à un r_{\max} donné

Sous plusieurs effets¹, le flux lumineux émis à une certaine position du disque et possédant un redshift z est modifié de la manière suivante :

$$F_{\text{obs}} = \frac{F_{\text{emis}}}{(1 + z)^4}$$

Pour la partie qui s'éloigne de l'observateur $z > 0$ et le flux est atténué. Pour la partie qui se rapproche de l'observateur $z < 0$ et le flux est amplifié.

- A partir de ces formules, tracer l'image réelle $F_{\text{obs}}(b, \alpha)$ que le détecteur observerait, pour différentes inclinaisons d'un disque d'accrétion s'étendant de $r_{\min} = 3r_s$ à un r_{\max} donné.

3 Raies relativistes

Si, en plus du rayonnement de corps noir, la matière du disque émet des raies, celles-ci sont modifiées par les différents effets relativistes mentionnées précédemment. Si une raie a été émise à une fréquence ν_0 avec une intensité I_0 :

$$I_{\nu}^{\text{em}}(\nu) = I_0 \delta(\nu - \nu_0)$$

1. a) L'énergie des photons est diminuée d'un un facteur $1 + z$ (effet Doppler classique). b) Le temps propre de l'observateur dilaté d'un facteur $1 + z$ par rapport au temps de la source, ce qui diminue l'intensité de ce même facteur. c) L'angle solide dans lequel est émis le rayonnement semble plus grand d'un facteur $(1 + z)^2$ dans le référentiel de l'observateur, ce qui réduit encore l'émission de ce même facteur.

et que ces photons sont soumis à un redshift z , alors la raie va être amplifiée/atténuée et décalée :

$$I_{\nu}^{\text{obs}}(\nu) = \frac{I_0 \delta((1+z)\nu - \nu_0)}{(1+z)^4} = \frac{I_0 \delta(\nu - \nu_0/(1+z))}{(1+z)^3}$$

En principe, l'intensité d'émission I_0 dépend du rayon. On pourra prendre une loi en $1/r^2$.

Le spectre total du disque d'accrétion est obtenu en sommant l'émission qui arrive sur toute la surface du détecteur. Dans le cas d'une raie, chaque point du détecteur (associé à un élément de surface $dS = bd\alpha db$) reçoit des photons monochromatiques dont le flux et l'énergie sont différents. On pourra donc se définir une grille en fréquence et compter le nombre de photons qui arrivent dans chaque bin.

- Calculer et tracer le spectre total reçu sur le détecteur.
- Étudier le rôle de l'inclinaison et du rayon interne sur la forme de la raie observée.

4 Références

- Luminet J-P., 1979, A&A 75, p. 228-235
- Fukue J., 2003, PASJ 55, p.155-159
- Kato S. et al. 2008, Kyoto University Press ISBN 978-4-87698-740-5, "Black Hole accretion disks"