Sujet 5

Équation et solitons de sine-Gordon (**)

Le but de ce projet est d'étudier les solutions de l'équation de sine-Gordon, en particulier les solutions de type *solitons*. Le problème discret est décrit par un système d'équations différentielles ordinaires qu'il faudra résoudre numériquement.

1 Le problème physique

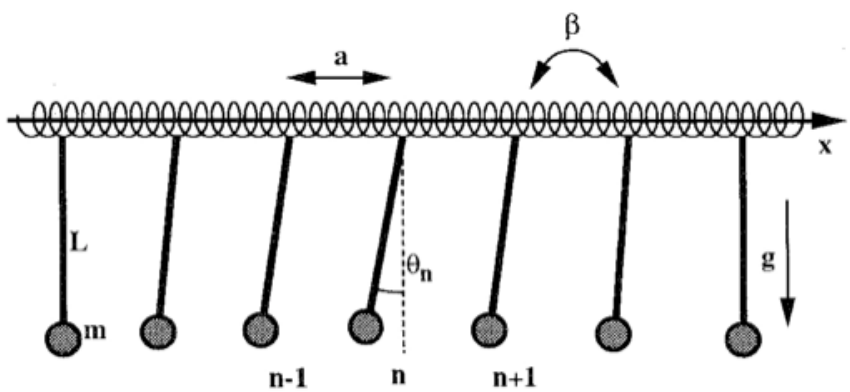

FIGURE 1 – Chaîne de pendules

1.1 Cas discret

On considère le système représenté sur la Fig. 1. Il est constitué d'une succession de N pendules pesants identiques, de masse individuelle $m = m_{\text{tot}}/N$, de longueur L et de moment d'inertie $I = I_{\text{tot}}/N$. Ces pendules sont accrochés régulièrement sur un ressort de torsion de longueur totale D et de raideur totale β_{tot}. Les pendules peuvent osciller dans le plan perpendiculaire à l'axe du ressort. Chaque section de ressort entre deux pendules est donc caractérisé par une distance $a = D/N$ et une raideur $\beta = N\beta_{\text{tot}}$.

On repère la position de chaque pendule n par l'angle θ_n qu'il fait avec la verticale dans son plan d'oscillation. L'évolution d'un pendule est déterminé par les positions des pendules voisins les plus proches et sa position vérifie l'équation suivante :

$$\frac{d^2\theta_n}{dt^2} + \omega_0^2 \sin\theta_n = c^2\frac{\theta_{n+1} - 2\theta_n + \theta_{n-1}}{a^2} \qquad , \quad n \in [1, N-2] \tag{1}$$

où $c^2 = (D^2\beta_{\text{tot}})/I_{\text{tot}}$ et $\omega_0^2 = m_{\text{tot}}gL/I_{\text{tot}}$. Les relations qui déterminent la position du premier pendule ($n = 0$) et du dernier pendule ($n = N-1$) sont nécessairement différentes et sont définies par le choix de conditions aux limites.

1.2 Cas continu

Souvent, on s'intéresse à la limite continue de ce problème, c'est à dire quand le nombre de pendules tend vers l'infini pour une longueur de ressort, une masse totale et un moment d'inertie total donnés, c'est à dire aussi quand la distance a entre deux pendules tend vers zéro. La variable $\theta_n(t) = \theta(x = na, t)$ devient alors un fonction continue de l'espace $\theta(x, t)$ qui vérifie l'équation de sine-Gordon :

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \omega_0^2 \sin\theta = 0 \tag{2}$$

On peut distinguer plusieurs types de solutions à cette équation continue :

a) Pour des oscillations de faible amplitude, l'équation se réduit à une équation de Klein-Gordon dont les solutions complexes sont les :

$$\theta(x, t) = \theta_0 e^{-i(\omega t - kx)}$$

où θ_0 est une constante complexe d'intégration et où ω et k reliés par l'équation de dispersion : $\omega^2 = c^2k^2 + \omega_0^2$.

b) Pour de grandes amplitudes, on peut identifier une famille de solutions de type soliton, dont chaque membre est caractérisé par une vitesse de propagation v. Ces solutions correspondent à des situations où les pendules font un tour complet autour de leur axe et sont définies par l'expression suivante (voir Fig. 2) :

$$\theta(x, t) = 4\arctan\left[e^{\pm(\omega t - kx + kx_0)}\right]$$

où $k = \gamma\omega_0/c$, $\omega = \gamma\omega_0 v/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ et où x_0 est la position du soliton en $t = 0$. Ces solutions n'existent que pour $|v| < c$ et le signe de v détermine le sens de propagation du soliton le long de l'axe x. Le choix du $\pm$ dans l'expression précédente détermine quant à lui le sens dans lequel les pendules tournent. On appelle *kink* les solutions qui tournent dans le sens positif (signe $+$) et *anti-kink* celles qui tournent dans le sens négatif (signe $-$).

2 Le projet

2.1 Travail préliminaire

- Démontrer les équations de la partie précédente.
- Écrire l'équation différentielle du second ordre de sine-Gordon **discrète** (Eq. 1) comme un système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre en temps.
- Réfléchir à la formulation vectorielle des méthodes dédiées à la résolution d'équations différentielles ordinaires.

2.2 Travail numérique

- Écrire un programme qui résout ce système d'équations pour trois types de conditions aux limites (extrémités périodiques, fixes et libres).
- Choisir un jeu de paramètres qui permet de modéliser au mieux le problème continu.
- Enregistrer les solutions dans un/des fichiers de manière à pouvoir les visualiser avec gnuplot.

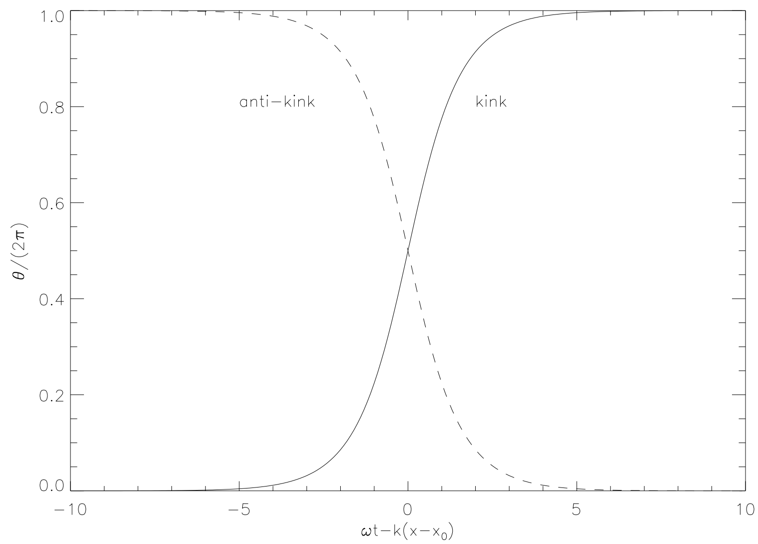

FIGURE 2 – Solitons kink et anti-kink de l'équation de sine-Gordon

- Tester le programme dans les deux cas suivants : $c = 0$ pour de petites amplitudes, et $\omega_0 = 0$ dans le cas général. Comparer les résultats aux solutions théoriques.
- Dans le cas général, vérifier les solutions de faible et de forte amplitudes. Étudier en particulier les collisions kink/kink et kink/anti-kink.
- D'autres solutions plus complexes existent également. Faire une recherche bibliographique pour les identifier. Puis les tester avec le programme réalisé.