Optique de Fourier et haute résolution

PAEL5 ~ Sciences de l'Univers 1997

Enseignant : Laurent Koechlin

Haute résolution angulaire

Mardi 29 avril 1997, 10:15 - 12:15 salle G11

1. Fonction de transfert atmosphérique
   Tavelures
   exercices : Turbulence et respect du critère de Raleigh

Mardi 20 mai 1997, 10:15 - 12:15

2. Tavelures et haute résolution angulaire
3. application aux situations de faible luminosité
   exercices : Détection d'une étoile double en interférométrie
   Restitution la photométrie relative

Jeudi 22 mai 1997, 10:15 - 12:15 salle G8

4. Récupération de la phase
   4.1 Méthode de Knox & Thompson
   4.2 Méthodes bispectrales
   exercices sur le bispectre : retrouver la module à partir du bispectre

Mardi 3 juin 1997, 10:15 - 12:15

5. Optique adaptative
   exercices : Isoplanétisme
   Applications de l'optique adaptative

Jeudi 5 juin 1997, 10:15 - 12:15

6. Synthèse d'ouverture
   exercices d'application sur la synthèse d'ouverture

Mardi 10 juin 1997, 10:15 - 12:15

Synthèse d'ouverture,
exercices, révisions

Exam prévu Jeudi 26 Juin 17:00 - 19:00

Notations :

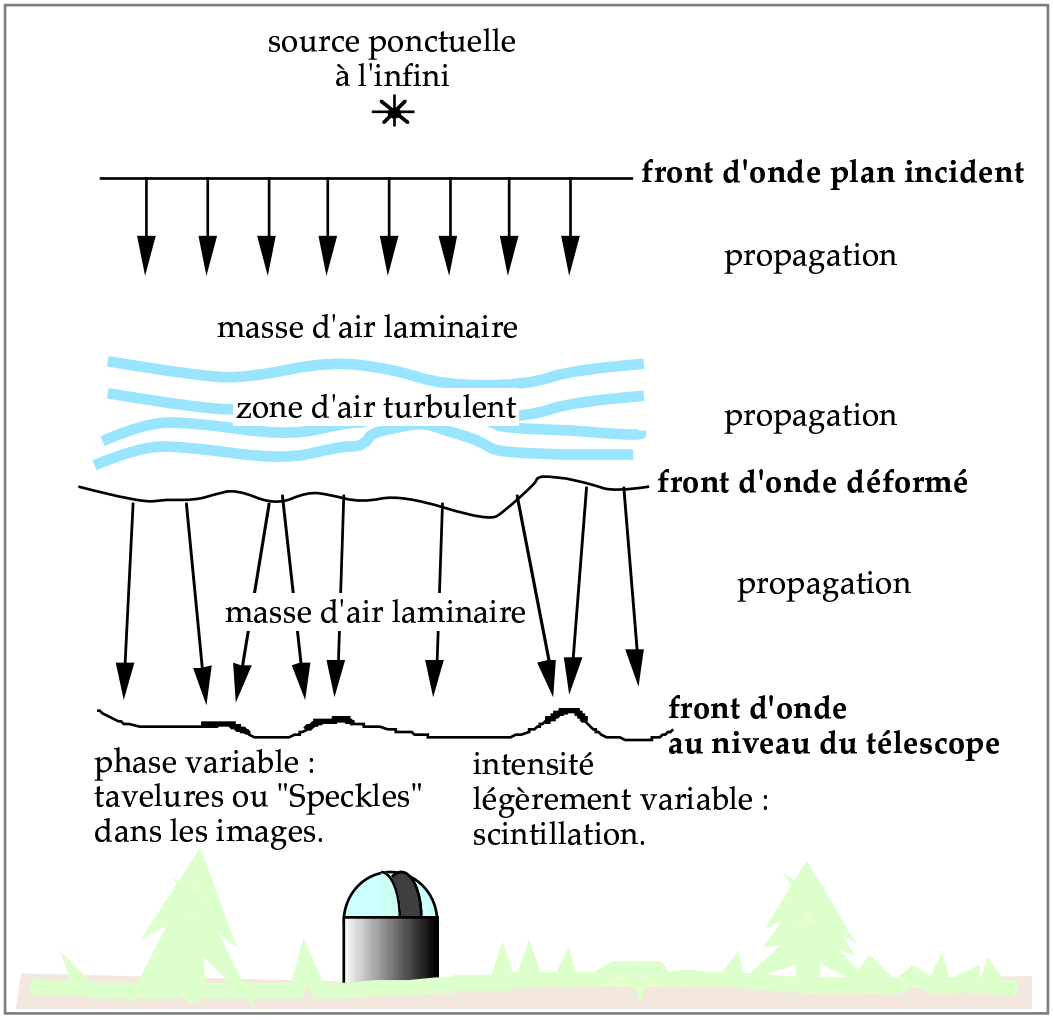
longueur d'onde : λ ; nombre d'onde : $\sigma = 1/\lambda$

fréquence : $\nu = c/\lambda$; vecteur d'onde : $|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$

Position spatiale linéaire ou angulaire :	x
Fréquence spatiale linéaire ou angulaire :	u
Transformée de Fourier d'une fonction $f(x)$:	$\hat{f}(u)$
Produit de convolution de deux fonctions h et g :	$h * g$
Produit simple de deux fonctions h et g :	$h \,.\, g$
complexe conjugué d'une fonction f(x) :	$f(x)^*$
Distribution de Dirac :	$\delta(x)$
Sinus cardinal : sin (x) / x :	$\mathrm{sinc}\,(x)$
Coordonnées dans le plan objet (ou source) :	x_s
Coordonnées dans le plan pupille :	x_p
Coordonnées dans le plan image :	x_i
vecteur :	$\mathbf{V}$ (lettre en gras) ou $\vec{V}$

1. Turbulence, tavelures

1.1 Effet de la turbulence sur l'indice de l'air



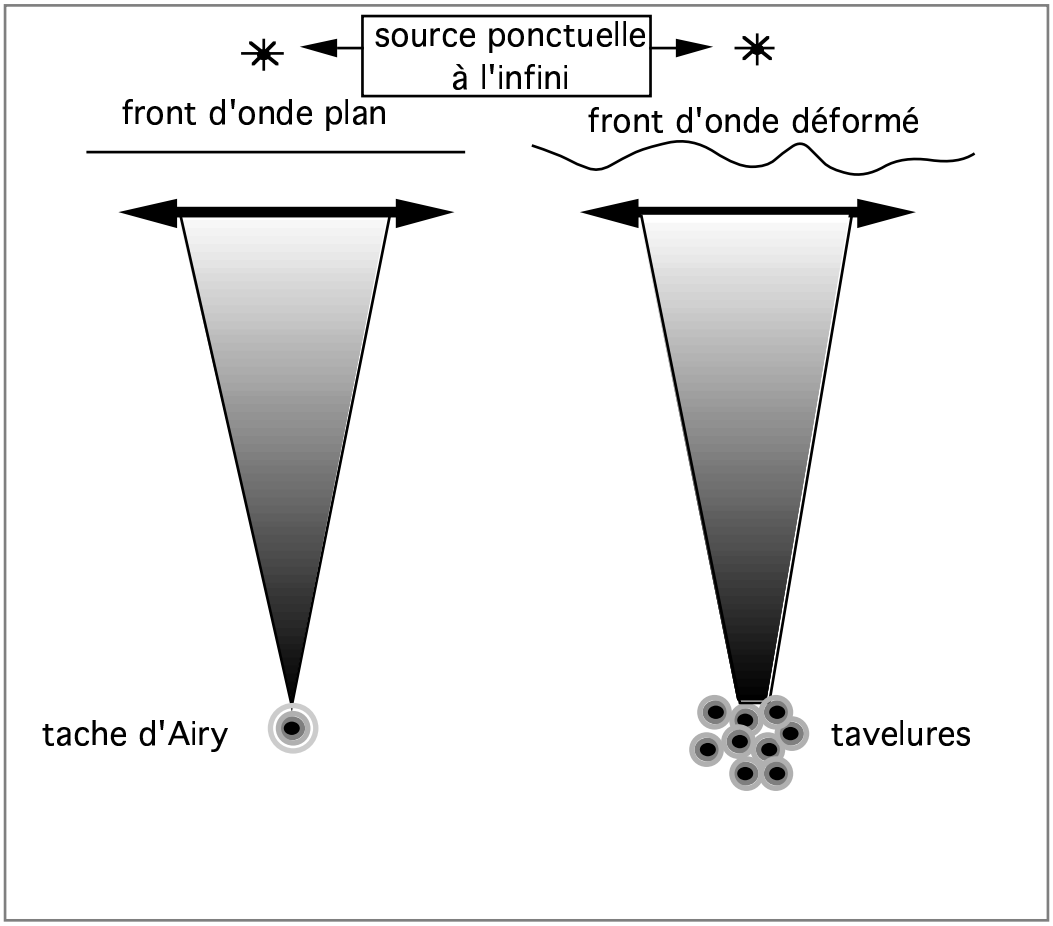
---

exercice 1.1 : Turbulence de l'air et dégradation des images

a) Calculer la différence de chemin optique L associée à la traversée d'une veine d'air "froid" de 0.25 m d'épaisseur ayant un écart en température de 1 °C avec l'air environnant : température de l'air environnant : 300 °K.

L'indice de l'air est n = 1,0002817 à λ = 400 nm, et (n-1) varie proportionnellement à sa densité.

b) Cette veine d'air froid empiète sur une partie du passage de la lumière arrivant dans un télescope. Quels sont les effets sur les images données à λ = 400 nm?



---

expérience : Speckles en éclairage cohérent

matériel nécessaire : laser+lentille (f = 5 à 50 mm) pour étaler le faisceau.

Fixer la lentille à la sortie du laser, regarder la tache du faisceau étalé sur un écran. Prenez les précautions nécessaires pour que le faisceau ou son reflet n'atteigne pas les yeux de quelqu'un. Ne jamais regarder fixement l'impact sur un écran d'un faisceau laser, même de faible puissance, s'il na pas été étalé par une optique quelconque : DANGER !

On voit des speckles sur l'écran car les différentes parties éclairées par le laser sont des sources cohérentes entre elles et leurs amplitudes s'ajoutent, formant des interférences sur la rétine. La taille angulaire des speckles vus par l'oeil vaut :

$\theta_S = \lambda / D$ où D est le diamètre de la pupille de l'oeil.

La taille angulaire de ces speckles ne dépend pas de la distance de l'oeil à l'écran. Elle dépend par contre de D. On peut faire varier celui-ci en plaçant un diaphragme devant son oeil.

voir le cours de J P Perez sur la fonction de transfert en éclairage cohérent.

expérience : Speckles en éclairage incohérent.

Matériel nécessaire :
Lampe halogène de bureau ou une autre source ponctuelle.
Cache plastique dépoli (type couverture de cahier)
Négatif sur film à grain fin des masques ci-dessous ou à défaut trous d'épingle de ø 1 et 0.2 mm dans du papier d'aluminium.

Se placer à plusieurs mètres de la source lumineuse pour qu'elle apparaisse ponctuelle et la regarder avec le masque ci-dessus placé contre son oeil (diapositive ou alu). On observe la fonction de transfert incohérente sans aberration. En plaçant le plastique dépoli devant le masque on introduit des distorsions de phase et crée des speckles. Comparer les speckles vus à travers le trou ø 1 mm, le trou ø 0.2 mm et les deux ouvertures rapprochées.

---

2. Fonction de transfert atmosphérique.

2.1 Relation entre objet et image en éclairage incohérent :

Pour un objet étendu dont l'intensité est représentée par $O(x_g)$ l'intensité dans l'image normalisée, $I(x_i)$ provient de la somme des intensités de tous les point sources :

$$I(x_i) = \int O(x_g) \,.\, \mathcal{H}(x_i - x_g)\, dx_g$$

$$I(x_i) = O(x_g) * \mathcal{H}(x_g) \qquad (2.1)$$

"$*$" indique la convolution.

x_g et x_i peuvent être des vecteurs à deux dimensions.

Si l'on fait la TF de $I(x_i)$, on a :

$$\hat{I}(u) \equiv \int I(x_i) \exp(-2i\pi\, u\, x_i)\, dx_i$$

où $u = x_p / \lambda f$

$$\hat{I}(u) = \widehat{O}(u) \,.\, \widehat{\mathcal{H}}(u) \qquad (2.2)$$

"." indique la multiplication.
u est un vecteur à deux dimensions donnant la fréquence spatiale.

$\widehat{\mathcal{H}}(u) \equiv \int \mathcal{H}(x_g) \exp(-2i\pi\, u\, x_g)\, dx_g$ est la fonction de transfert du télescope.

$\widehat{O}(u) \equiv \int O(x_g) \exp(-2i\pi\, u\, x_g)\, dx_g$ est la TF de l'objet.

---

exercice 2.1 : Démontrer la relation (2.2)

Par ailleurs, $\widehat{\mathcal{H}}(u)$ est la TF de le réponse impulsionelle en intensité :

$$\widehat{\mathcal{H}}(u) = \int \langle \Psi_i(x_g)\Psi_i^*(x_g)\rangle \exp(-2i\pi\, u\, x_g)\, dx_g$$

D'après les propriétés de la TF, on a :

$$\widehat{\mathcal{H}}(u) = \int \Psi_p(x_p)\, \Psi_p^*(x_p - \lambda f u)\, dx_p$$

$$\widehat{\mathcal{H}}(u) = \int P(x_p)\, P^*(x_p - \lambda f u)\, dx_p$$

$P(x)$ est la transmission au niveau de la pupille.
$x \equiv$ position dans le plan pupille (vecteur 2D).
$\lambda \equiv$ longueur d'onde.
$f \equiv$ focale résultante du système optique.

Dans le cas d'un télescope *sans aberration* de diamètre d, $P(x)$ peut être représenté par une fonction disque $D(x)$ valant 1 pour tout x compris dans un disque de diamètre d et 0 ailleurs.

Sans aberration :

$$\widehat{\mathcal{H}}(u) = \int D(x)\, D(x - \lambda f u)\, dx \qquad (2.3)$$

Dans le cas d'un télescope *avec aberration* de diamètre d, la transmission au niveau de la pupille vaut :

$$P(x) = D(x)\,.\,A(x)$$

où $A(x)$ est de module unité mais de phase variable en fonction des différences de marche causées pas les défauts de l'optique au niveau de la pupille.

Avec aberration :

$$\widehat{\mathcal{H}}(u) = \int D(x)\, D(x - \lambda f u) \quad A(x)\, A^*(x - \lambda f u)\, dx \qquad (2.4)$$

Dans tous les cas $\widehat{\mathcal{H}}(u)$ vaut 0 au delà de $|u| = d/\lambda f$: le support de $\widehat{\mathcal{H}}(u)$ est un cercle de rayon $d/\lambda f$. La fréquence limite est notée u_c (fréquence de coupure).

2.2 Evolution dans le temps de la fonction de transfert atmosphérique.

Pour un instrument optique affecté par la turbulence atmosphérique il faut prendre en compte la variable t : la réponse impulsionelle du télescope $\mathcal{H}(x_i, t)$ dépend de la turbulence, variable dans le temps. La relation de convolution entre image et objet s'écrit :

Espace image : $I(x_i, t) = O(x_i) * \mathcal{H}(x_i, t)$

Espace de Fourier : $\hat{I}(u, t) = \widehat{O}(u) \,.\, \widehat{\mathcal{H}}(u, t)$

L'expression (IV) devient :

$$\widehat{\mathcal{H}}(u,t) = \int \underbrace{D(x)\, D(x - \lambda f u)}_{(a)} \quad \underbrace{A(x, t)\, A^*(x - \lambda f u, t)}_{(b)}\, dx \qquad (2.I)$$

La partie (a) correspond à la fonction de transfert sans aberration en éclairage incohérent : l'autocorrélation de D (x) , fonction "diaphragme" associée à l'ouverture du télescope, indépendante du temps.

La partie (b) : A(x, t) est la partie liée aux aberrations du front d'onde causées par l'atmosphère et les défauts de l'optique : filtrage en phase et en amplitude.

Mettons A(x, t) sous la forme :

$A(x, t) = A_m(x, t) \exp[i\varphi(x, t)]$ où $\varphi(x, t)$ est le terme de phase.

Le terme $A_m(x, t)$ dans la contribution de l'atmosphère à la fonction de transfert a été présenté dans le paragraphe précédent comme valant 1. Ceci n'est rigoureux que si les déphasages sont introduits au niveau de la pupille. S'ils sont causés par une zone turbulente à haute altitude, on observe des variations de $A_m(x, t)$ après propagation de l'onde jusqu'au niveau du sol : par exemple le scintillement des étoiles.

On peut toutefois faire l'approximation $A_m(x, t) = 1$ pour une turbulence "non saturée", comme c'est le cas pour une traversée verticale de l'atmosphère par beau temps. On a alors :

$$\widehat{\mathcal{H}}(u, t) = \int D(x)\, D(x - \lambda f u) \quad \exp[\, i\,(\varphi(x, t) - \varphi(x - \lambda f u\,, t)]\, dx$$

2.3 Distance de cohérence.

Si l'on se place en lumière quasi monochromatique, on peut relier la phase φ au chemin optique L par la relation :

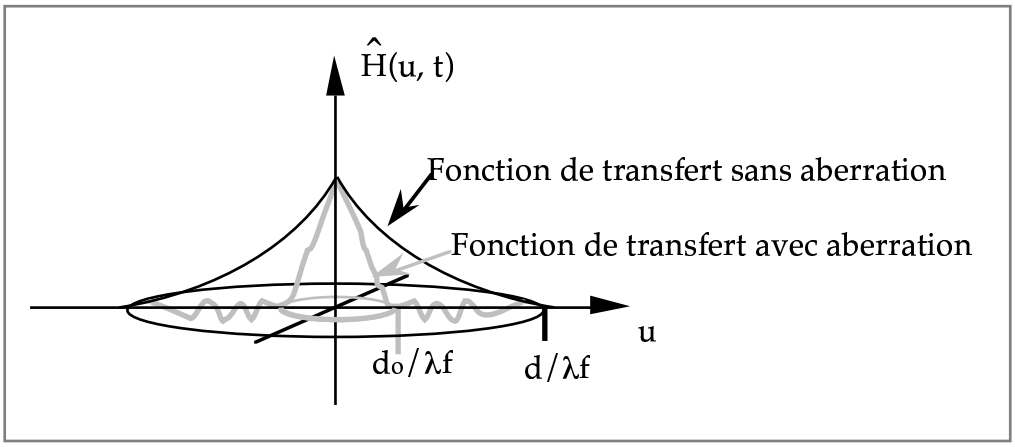
$\varphi(x, t) = \sigma L(x, t)$; où le nombre d'ondes $\sigma \equiv 1 / \lambda$.

$$\widehat{\mathcal{H}}(u, t) = \int D(x)\, D(x - \lambda f u) \quad \exp\left[\, i\, \sigma(L(x, t) - L(x - \lambda f u, t))\, \right] dx$$

On peut alors définir la différence de chemin optique au temps t entre deux points du front d'onde par :

$$\Delta L(x,\ x - \lambda f u, t) \equiv L(x, t) - L(x - \lambda f u, t)$$

$$\widehat{\mathcal{H}}(u, t) = \int D(x)\, D(x - \lambda f u) \exp\left[\, i\, \sigma\, \Delta L(x,\ x - \lambda f u, t)\, \right] dx \qquad (2.II)$$



Fonction de transfert en pose courte

• Pour les basses fréquences spatiales le couples de points "échantillonnés" sur le front d'onde, séparés par $\lambda f u$, sont proches. On conçoit que la phase n'aura que peu varié entre les deux. On peut définir d_o, la distance de cohérence de l'atmosphère, par la condition :

$$d_o \quad \text{tel que} \quad \langle |\Delta L(x, x - d_o, t)|^2 \rangle_x \ < \ (\lambda/4)^2$$

où $\langle |\Delta L|^2 \rangle$ est la valeur quadratique moyenne de $\Delta L(x, x-d_o)$ sur l'ensemble des points x de la pupille. d_o est une distance à ne pas dépasser entre deux points de la pupille pour que les ondes se propageant à partir de ces points interfèrent constructivement.

$$\lambda f u < d_o \ \Rightarrow \ \langle |\Delta L|^2 \rangle_x \ < \ (\lambda/4)^2$$

Pour u petit, $\Delta L \to 0$, et dans l'eq. (2.II) : $\exp(i\, \sigma\, \Delta L) \to 1$. $\widehat{\mathcal{H}}(u, t)$ tend alors vers la réponse impulsionelle sans aberration.

• Pour les hautes fréquences spatiales les couples de points "échantillonnés" sur le front d'onde ne sont plus corrélés :

$$\lambda f u \gg d_o \ \Rightarrow \ \langle |\Delta L|^2 \rangle_x \ \gg \ (\lambda/4)^2$$

La différence de marche fluctue à grande amplitude en fonction de x, u et t ; $\widehat{\mathcal{H}}(u, t)$ prend des valeurs faibles quasi aléatoires à valeur moyenne nulle en fonction de u et t qui sont responsables de l'aspect granuleux de I(x, t) : les tavelures ou speckles. La dépendance en t est à valeur moyenne nulle si les aberrations sont suffisamment grandes devant λ comme c'est le cas pour celles causées par l'atmosphère.

$$\widehat{\mathcal{H}}(u, t) = |\widehat{\mathcal{H}}(u, t)| \exp [i\, \varphi_H (u, t)] \qquad \text{avec} \qquad <\varphi_H (u, t)>_t = 0$$

La transition entre ces deux modes se fait pour $\lambda f u = d_o$. Pour expliquer de manière plus intuitive le phénomène des tavelures, on peut considérer celles-ci comme des interférences entre les ondes issues des différentes zones de la pupille. Ces ondes sont déphasées les unes par rapport aux autres, la taille moyenne de ces zones dans la pupille étant définies par d_o.

---

problème. Si l'on considère D très grand, l'expression (2.II) peut s'approximer par:

$$\widehat{\mathcal{H}}(u) \approx \int \exp [\, i\, \sigma\, \Delta L\, (x,\ x - \lambda f u)\,]\, dx \qquad \text{avec } \Delta L \text{ quelconque.}$$

Pourquoi ne tend-elle pas vers 0 $\forall$ u ? C'est le problème de l'existence des tavelures.

2.2 Temps de cohérence de l'atmosphère.

On peut définir de façon similaire τ_o, le temps de cohérence. Si l'on se place en une haute fréquence spatiale donnée u où $\Delta L\, (x, x-\lambda f u\, , t) >> \lambda$ et que l'on mesure ΔL en t et en $t + \tau$, on aura τ_o est défini par :

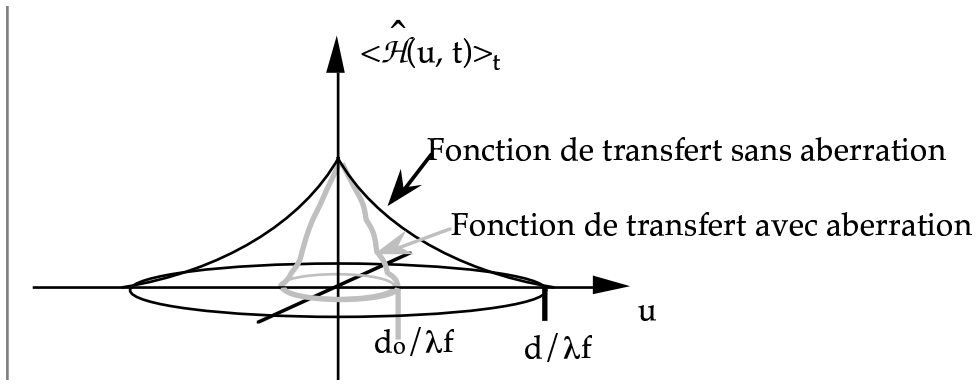
$$\tau_o = \tau \text{ tel que } \quad <|\Delta L\, (t) - \Delta L(t + \tau)|^2>_t \ < \ (\lambda / 4)^2$$

Une relation simple lie τ_o et d_o si l'on fait l'hypothèse que la cause des aberrations est localisée à une altitude donnée et se déplace de manière homogène à la vitesse du vent à cette altitude :

$$\tau_o = d_o / v \qquad \text{où v est la vitesse du vent.}$$

En pose longue, ($t > \tau_o$) la moyenne temporelle $<\widehat{\mathcal{H}}(u, t)>_t$ tend vers 0 quand $\lambda f u > d_o$
La fréquence spatiale transmise la plus élevée est $u_{max} = d_o / \lambda f$.

$<\mathcal{H}(x, t)>_t$, la réponse impulsionelle en pose longue, est de support $\lambda f / d_o$. Elle correspond au plus à celle d'un télescope de diamètre d_o sans aberration, pour tout diamètre du télescope $d > d_o$.



Fonction de transfert en pose longue

2.3 Paramètre de Fried, ou diamètre de cohérence.

La distance de cohérence d_o décrite ci dessus est relativement simple, mais on lui préfère une mesure analogue : r_o, le rayon de Fried, plus précis et différent dans son expression :

$$\pi\, r_o^2 = \int \widehat{\mathcal{H}}(u, t)\, du$$

Intuitivement, r_o est le diamètre maximal du télescope qui ne serait pas affecté par la turbulence atmosphérique.

r_o = 0,1 m en moyenne pour λ = 0.5 µm mais il dépend beaucoup des conditions météo. Un bon mistral donnera un ciel cristallin mais avec un r_o = 0,01 m, donc de très mauvaises images. Une situation de vent faible au Pic du Midi peut occasionner des r_o de 0.5 m.

Pour une situation de turbulence donnée, r_o dépend de λ selon la relation : $r_o = \alpha\, \lambda^{6/5}$

2.4 Rapport de Streilh

C'est un paramètre définissant l'effet des aberrations d'une surface d'onde :

$$\mathcal{S} = \frac{\int \widehat{\mathcal{H}}_a(U)\, dU}{\int \widehat{\mathcal{H}}(U)\, dU}$$

où $\widehat{\mathcal{H}}_a(U)$ définit la fonction de transfert avec aberrations et $\widehat{\mathcal{H}}(U)$ la fonction de transfert théorique sans aberrations. Cela correspond aussi, par la définition des TF à :

$$\mathcal{S} = \frac{\mathcal{H}_a(0)}{\mathcal{H}(0)}$$

Soit le rapport entre la hauteur du pic central de la réponse impulsionelle avec aberrations et le pic central de la réponse impulsionelle sans aberrations.

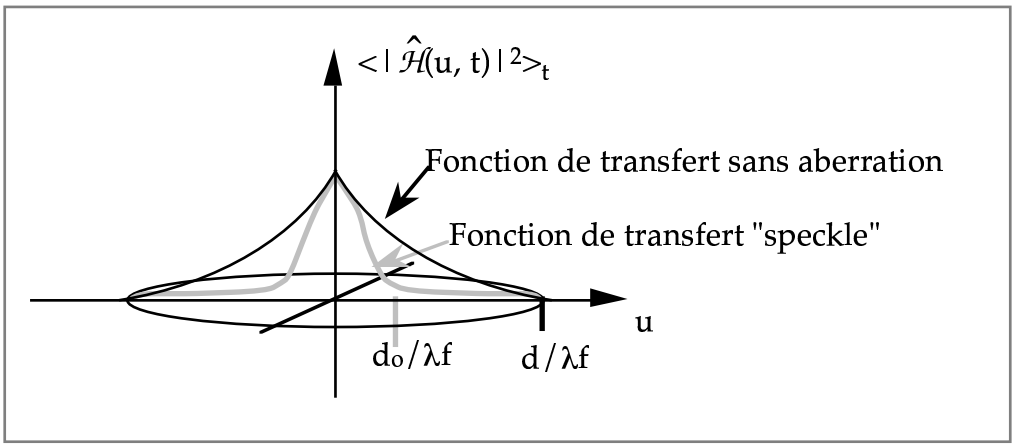
3. Tavelures et haute résolution angulaire.

$\widehat{\mathcal{H}}(u,t)$ instantané (temps de pose << τ_o) a une phase fluctuante mais garde un module non nul jusqu'à la fréquence de coupure $u_c = d/\lambda f$. Alors que sa moyenne temporelle s'annule pour tout $u > r_o/\lambda f$, la moyenne de son module (ou du module carré) tend vers une valeur non nulle jusqu'à $u_c = d/\lambda f$.

En décomposant $\widehat{\mathcal{H}}(u, t)$ en module et phase,

$$\widehat{\mathcal{H}}(u, t) = |\widehat{\mathcal{H}}(u, t)| \exp [i\, \varphi (u, t)]$$

on a $<\varphi (u, t)>_t = 0$ mais $<|\widehat{\mathcal{H}}(u, t)|^2>_t \neq 0 \quad \forall\ u < u_c$



Fonction de transfert "speckle"

Pour un objet étendu, on a les relations :

$$\hat{I}(u) = \widehat{O}(u) \cdot \widehat{\mathcal{H}}(u) \Rightarrow$$
$$|\hat{I}(u)|^2 = |\widehat{O}(u)|^2 \cdot |\widehat{\mathcal{H}}(u)|^2 \Rightarrow$$
$$<|\hat{I}(u, t)|>_t = |\widehat{O}(u)|^2 \cdot <|\widehat{\mathcal{H}}(u, t)|^2>_t \qquad (3.I)$$

On suppose que l'objet reste invariable pendant l'observation.

Comme $<|\widehat{\mathcal{H}}(u, t)|^2>_t \neq 0$ on peut récupérer $|\widehat{O}(u)|^2$ pour tout $u < u_c$ en inversant la relation (3.I) :

$$|\widehat{O}(u)|^2 = <|\hat{I}(u,t)|^2>_t \ / \ <|\widehat{\mathcal{H}}(u, t)|^2>_t \qquad (3.II)$$

On obtient $<|\hat{I}(u, t)|^2>$ par intégration des modules carrés de TF d'images à courte

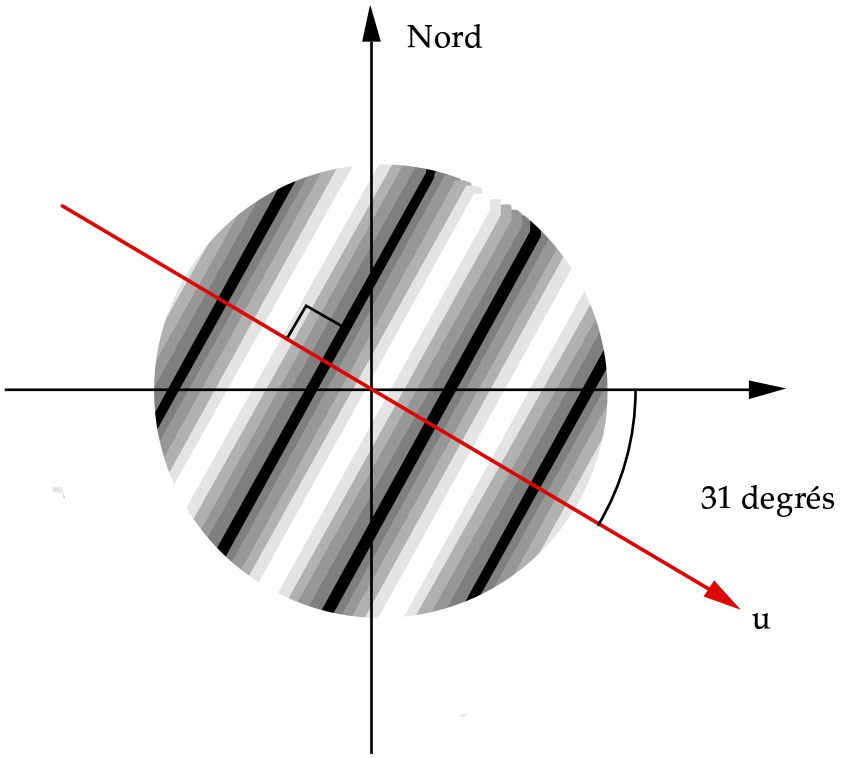
pose de l'objet à étudier et $<|\widehat{\mathcal{H}}(u, t)|^2>$ par la même opération sur une source ponctuelle (étoile de référence).

L'interférométrie des tavelures fut découverte par Antoine Labeyrie en 1970 et mise en oeuvre au télescope de 5 mètres de diamètre du Mont Palomar. On connaissait depuis plusieurs dizaines d'années le phénomène des tavelures mais on n'avait pas fait le raisonnement permettant de récupérer les hautes fréquences spatiales : intégrer les modules carrés de TF.

La première application fut d'enregistrer uns série d'images à courte pose sur film avec un intensificateur, puis d'intégrer les modules carrés des TF analogiquement en "rejouant" le film dans le plan pupille d'un système optique annexe.

On acquiert maintenant directement des images en mémoire d'ordinateur. Le traitement numérique par TF ou autocorrélation se fait en temps réel. Plusieurs centaines de binaires découvertes et diamètres stellaires ont été mesurés, qui n'étaient pas accessibles autrement, ainsi que des images gravitationnelles, la surface du soleil, des petites planètes et le centre d'amas globulaires.

Exercice 3.1 :
La figure suivante montre le résultat de l'intégration des modules carrés des TF de 1000 poses courtes sur un objet stellaire particulier, après normalisation par l'observation dans les mêmes conditions d'une source ponctuelle.



Mesuré selon la direction indiquée par le vecteur **u** dans la figure, le profil d'intensité dans ce module carré de TF peut être représenté par :

$<|\hat{I}(\mathbf{u}, t)|^2>_t \ / <|\widehat{\mathcal{H}}(\mathbf{u}, t)|^2>_t = 1 + \cos(2\pi\, a\, \mathbf{u})$ avec a = 2.424 10^{-7} radians.

a) Donner à partir de l'expression ci-dessus l'autocorrélation de O(**x**).

b) Quel type d'objet est O(**x**) ? Faire un schéma. Quels paramètres peut-on déduire de la figure, et de la valeur de a?

c) Peut-on reconstruire l'objet O(**x**) lui-même plutôt que son autocorrélation ?
si oui comment ?
si non, que manque-t-il comme information ? Donner la réponse en "bits".

Exercice 3.2 :
a) Donner l'expression de l'autocorrélation d'une étoile double dont les composantes sont ponctuelles et d'intensité A pour l'une et B pour l'autre.
b) Après observation en mode tavelures d'une étoile double on obtient son autocorrélation. Celle-ci est de la forme :
$5\delta(x) + 2\,\delta(x + 5) + 2\,\delta(x - 5)$
En exprimant x en mm. Quelle est la séparation des images des étoiles ?
c) Quelle sont les brillances des deux étoiles ?

---

4. Application aux situations de faible luminosité.

4.1 Comptage de photons.

Dans le cas ou les objets observés sont faibles, ou bien si les temps de pose doivent être très courts,, l'intensité lumineuse n'est pas mesurable directement. Avec un détecteur approprié on mesure la position de chaque photon individuellement et la brillance dans les images est remplacée par une densité de probabilité de présence de photons :

$$I(x) = \sum_{i}^{p} \delta\,(x - x_i)$$

x représente la position (vecteur 2D) dans l'image.
x_i est la coordonnée d'arrivée du photon i dans l'image.
p est le nombre de photons.
δ est une distribution de Dirac.

Dans le plan de Fourier on a :

$$\hat{I}(u) = \int \Sigma_i\ \delta\,(x - x_i)\exp(-2i\pi ux)\,dx$$

$$= \Sigma_i\ \exp(-2i\pi ux_i)$$

Et en module carré :

$$|\hat{I}(u)|^2 = \Sigma_i\ \exp(-2i\pi ux_i)\,\Sigma_j\ \exp(2i\pi ux_j)$$

$$= \Sigma_i \Sigma_j \ \exp\,[2i\pi u\,(x_j - x_i)]$$

On peut décomposer cette somme en deux parties : i = j et i ≠ j :

$$|\hat{I}\,(u)|^2 = \Sigma_i \Sigma_{j\neq i} \ \exp\,[2i\pi u\,(x_j - x_i)] \ + n$$

On a donc un fond continu constant quel que soit u, proportionnel au nombre de photons, auquel se superpose le signal. Ce fond s'appelle le "biais de photons". Il devient prépondérant et très gênant pour p petit.

On peut résoudre ce problème en utilisant l'autocorrélation plutôt que la TF. En effet il existe une relation simple entre autocorrélation et TF :

$$|\hat{I}\,(u)|^2 = \int I(x) \ \exp\,(-2i\pi ux)\,dx \int I^*(x')\,dx' \ \exp\,(2i\pi ux')$$

$$= \iint I(x)\,I^*(x') \ \exp\,[-2i\pi u(x-x')]\,dx\,dx'$$

$$a \equiv x-x'$$

$$|\hat{I}\,(u)|^2 = \iint I(x)\,I^*(x-a)\,dx \ \exp\,(-2i\pi ua)\,da$$

$$|\hat{I}\,(u)|^2 = \mathrm{TF}\left[\int I(x)\,I^*(x-a)\,dx\right] = \mathrm{TF}\left[\,\mathrm{AC}\,[\,I(x)\,]\,\right]$$

Où AC indique l'autocorrélation.

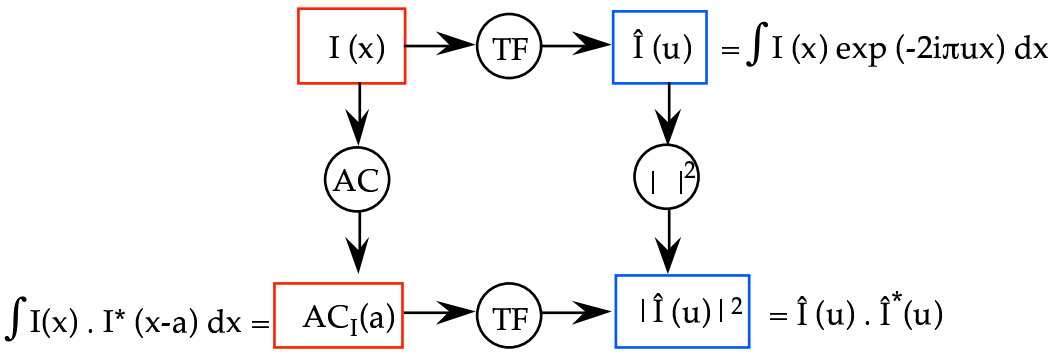


Schéma de la relation entre TF et AC pour une fonction quelconque I(x)

Pour des images variables dans le temps on a :

$$|\hat{I}\,(u,\,t)|^2 = \mathrm{TF}\left[\,\mathrm{AC}_x\,[\,I(x,\,t)\,]\,\right]$$

Une moyenne temporelle donne :

$$<|\hat{I}(u,\,t)|^2>_t = \mathrm{TF}\left[<\mathrm{AC}_x\,[\,I(x,\,t)>_t\,]\,\right]$$

On peut donc intégrer les autocorrélations de chaque pose puis faire une TF de cette intégration, on obtiendra les modules TF intégrés. Si l'on calcule

l'autocorrélation de chaque image en mode "comptage de photons", le biais de photons se trouve remplacé par un pic en 0 dans l'autocorrélation. Il est par ailleurs possible de calculer directement cette autocorrélation à partir des coordonnées des photons que certains détecteurs fournissent directement :

Si pour une image de p photons on a :

$$I(x) = \sum_{i}^{p} \delta\ (x - x_i)$$

L'autocorrélation devient :

$$AC\ [\ I(x)\ ] = \int I(x)\ I^*(x-a)\ dx = \int I(x)\ I(x-a)\ dx = \int \sum_{i}^{p} \delta(x-x_i) \sum_{j}^{p} \delta(x-x_j-a)\ dx$$

Comme $\delta(x-x_i)$ est nul partout sauf aux x_i, on a :

$$AC\ [\ I(x)\ ] = \sum_{i}^{p} \sum_{j}^{p} \delta(x_i-x_j-a)$$

Pour éliminer le pic en a = 0 il suffit de calculer :

$$AC_{-0}\ [\ I(x)\ ] = \sum_{i}^{p} \sum_{j \neq i}^{p} \delta(x_i-x_j-a) \qquad (4.I)$$

4.2 Algorithmes adaptés aux "matrices creuses".

Pour être représentée numériquement, une image doit être échantillonnée : x doit prendre un certain nombre (n.n) de valeurs discrètes, déterminant le nombre de pixels ou résolution de l'image. Celle-ci peut être représentée par une matrice n,n.

Si p est petit devant n^2 la plupart des éléments sont à 0 : les pixels où aucun photon n'a été détecté, et au maximum p éléments sont à 1 ou plus : ceux où au moins un photon a été détecté. On appelle cela une matrice creuse.

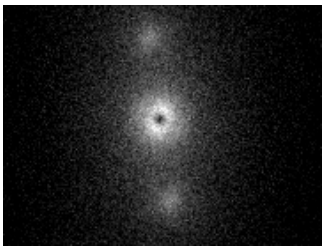
Su l'on cherche à calculer une AC par la formule classique d'intégration, on aura n^4 termes à sommer. Si par contre on utilise l'expression (4.I) on aura p^2 termes.
Pour $p << n$ on gagne un temps considérable, et le temps de calcul ne dépend pas de la taille de l'image.

4.2 Mise en pratique et observation.

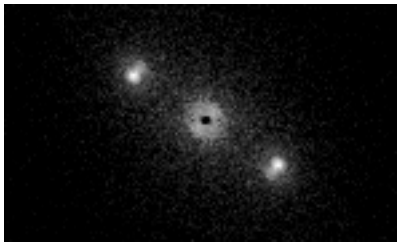
Les temps d'observation mis en jeu sont de l'ordre de 10 millisecondes pour chaque pose courte : ils doivent être plus petits que τ_0 sinon les images sont brouillées par le mouvement des tavelures. Avec les ordinateurs actuels, $t_{calcul} < \tau_0$ tant que le flux de photons ne dépasse pas 20 000 par seconde ($p \leq 200$) . Les résultats sont donc obtenus en temps réel.

Il faut intégrer plusieurs milliers d'autocorrélations de ces poses courtes pour obtenir un rapport signal à bruit satisfaisant, soit deux minutes à une heure pour le temps d'observation total par objet.

Plusieurs centaines de binaires et diamètres stellaires mesurés, qui n'étaient pas accessibles autrement. Images gravitationnelles, satellite de Pluton, quasars résolus. Magnitude limite : environ 17 avec les grands télescopes.



Autocorrélation de l'étoile double HR 40 observée au pic du midi
intégration de $6{,}8 * 10^6$ photons. La zone brillante avec un point noir au centre est le pic central de l'autocorrélation (le point noir est un artéfact: le centre devrait être brillant). Les deux points brillants au dessus et en dessous du pic central sont les pics secondaires indiquant le présence d'une deuxième étoile.



Autocorrélation de l'étoile triple HR 8652 observée au pic du midi
intégration de $12{,}4 * 10^6$ photons. Observez bien les pics secondaires, ils sont eux-mêmes doubles.

L'inconvénient de cette méthode est qu'elle ne donne pas la phase de $\widehat{O}(u)$: l'information de phase initialement présente dans $\hat{I}(u, t)$ mais perturbée aléatoirement par $\widehat{\mathcal{H}}(u, t)$ a été perdue.

5. Récupération de la phase.

5.1 Méthode de Knox & Thompson.

5.1.1 Mesure du gradient de phase.

$\widehat{\mathcal{H}}(u, t)$ perturbé par l'atmosphère a un terme de phase à valeur moyenne nulle :

$$\widehat{\mathcal{H}}(u, t) = |\widehat{\mathcal{H}}(u, t)| \exp[i\,\varphi(u, t)] \qquad \text{avec} \qquad \langle\varphi(u, t)\rangle_t = 0$$

Avec la relation $\hat{I}(u, t) = \widehat{\mathcal{H}}(u, t) \,.\, \widehat{O}(u)$, on pourrait penser qu'une moyenne temporelle des phases de $\hat{I}(u, t)$ permettrait de retrouver la phase de $\widehat{O}(u)$. Malheureusement les variations de phase de $\widehat{\mathcal{H}}(u, t)$ en fonction de t sont supérieures à 2π. La moyenne temporelle des phases de $\hat{I}(u, t)$ est alors sans signification.

Pour tirer parti d'une moyenne temporelle il faut trouver une fonction dont les variations de phase en fonction du temps ne dépassent pas 2π. Ce serait le cas pour le module carré qui était utilisée précédemment, mais il est trop efficace dans ce rôle car il annule carrément la phase.

Si par contre au lieu du module : $|\hat{I}(u, t)|^2 = \hat{I}(u, t) \,.\, \hat{I}^*(u, t)$

on calcule un module "dérivant": $\hat{k}(u, t) = \hat{I}(u, t) \,.\, \hat{I}^*(u+\Delta u, t)$ (5.I)

où Δu est un décalage en fréquence, suffisamment petit pour que les variations temporelles de phase de $\hat{k}(u, t)$ soient dans tous les cas inférieures à 2π, la moyenne des phases de $\hat{k}$ sera alors significative.

La relation de convolution entre objet et image donne :

$$\langle\hat{I}(u, t) \,.\, \hat{I}^*(u+\Delta u, t)\rangle_t = \underbrace{\widehat{O}(u) \,.\, \widehat{O}^*(u+\Delta u)}_{(a)} \,.\, \langle \underbrace{\widehat{\mathcal{H}}(u, t) \,.\, \widehat{\mathcal{H}}^*(u+\Delta u, t)}_{(b)} \rangle_t \qquad (5.II)$$

Décomposons en phase et module :

$$\widehat{O}(u) = |\widehat{O}(u)| \exp[i\varphi_{obj}(u)]$$
$$\widehat{\mathcal{H}}(u, t) = |\widehat{\mathcal{H}}(u, t)| \exp[i\varphi_H(u, t)]$$

Le terme (a) devient :

$$\widehat{O}(u) \,.\, \widehat{O}^*(u+\Delta u) = |\widehat{O}(u)|\,|\widehat{O}^*(u+\Delta u)| \,.\, \exp[\,i\varphi_{obj}(u) - i\varphi_{obj}(u+\Delta u)\,]$$

Si Δu est suffisamment petit par rapport à la résolution en fréquence spatiale (correspondant au champ objet), Le module de $\widehat{O}(u)$ aura peu varié entre u et u+Δu :

$$|\widehat{O}(u)|.|\widehat{O}^*(u+\Delta u)| \approx |\widehat{O}(u)|^2$$

Avec le même raisonnement pour le terme (b), l'expression de $<\hat{k}\ u, t)>_t$ devient :

$$<\hat{k}\ u, t)>_t =$$

$$|\widehat{O}(u)|^2 \exp[\, i\varphi_{obj}(u) - i\varphi_{obj}(u+\Delta u)\,] \ .\ <|\ \widehat{\mathcal{H}}(u, t)|^2 \exp[\, i\varphi_H(u, t) - i\varphi_H(u+\Delta u, t)] >_t$$

$$= \underbrace{|\widehat{O}(u)|^2 \exp[\, i\Delta\varphi_{obj}(u, u+\Delta u)\,]}_{(a)} \ .\ \underbrace{<|\ \widehat{\mathcal{H}}(u, t)|^2 \exp[\, i\Delta\varphi_H(u, u+\Delta u,\ t)\,] >_t}_{(b)}$$

Le terme (a) contient une information sur le module, la même que dans le chapitre précédent, mais il contient en plus une information sur la phase de l'objet :

$\Delta\varphi_{obj}(u,\ u+\Delta u)$ qui est la variation de phase en fonction de u.

Le terme (b) contient le module de la fonction de transfert, comme dans le chapitre précédent, auquel s'ajoute maintenant un terme de phase instantané lié aux aberrations :

$\Delta\varphi_H(u,\ u+\Delta u,\ t)$

En reprenant l'expression de $\widehat{\mathcal{H}}(u,\ t)$ donnée en (2.II) on peut montrer que pour Δu suffisamment petit le terme de phase $\Delta\varphi_H$ reste petit devant 2π. Il est majoré par la phase de :

$$\int \exp[\, i\,\sigma\,\Delta L\,(x,\ x - \lambda f u)\,]\,dx - \int \exp[\, i\,\sigma\,\Delta L\,(x,\ x - \lambda f(u+\Delta u)\,)\,]\,dx$$

$$= \int \exp[\, i\,\sigma\,\Delta L\,(x,\ x - \lambda f u)\,]\,dx - \int \exp[\, i\,\sigma\,\Delta L\,(x,\ x - \lambda f u - \lambda f\Delta u)\,]\,dx$$

$$= \int \exp[\, i\,\sigma\,\Delta L\,(x,\ x - \lambda f u)\,]\,dx - \int \exp[\, i\,\sigma\,\Delta L\,(x,\ x - \lambda f u)\,]\exp[\, i\,\sigma\,\Delta L\,(x,\ x - \lambda f\Delta u)]\,dx$$

$$\lambda f\,\Delta u << d_o \quad \Rightarrow \quad \exp[\, i\,\sigma\,\Delta L\,(x,\ x - \lambda f\Delta u)] \approx 1$$
$$\Rightarrow \quad \Delta\varphi_H << 2\pi$$

La moyenne temporelle du terme (b) aura un terme de phase petit. Les aberrations de phase liées à l'atmosphère étant à valeur moyenne nulle, il ne restera dans la moyenne que celles liées à l'instrument.

La phase de $<\hat{I}\,(u, t)\ .\ \hat{I}^*\,(u+\Delta u,\ t)>_t$ ne dépend donc que de l'objet et des aberrations de l'instrument. De façon analogue à la méthode des tavelures décrite au chapitre précédent, on inverse la relation (5.II) et l'on obtient :

$$|\widehat{O}(u)|^2 \exp[\, i\Delta\varphi_{obj}(u, u+\Delta u)\,] = \langle \hat{I}(u, t) \,.\, \hat{I}^*(u+\Delta u, t) \rangle_t \;/\; \langle \widehat{\mathcal{H}}(u, t) . \widehat{\mathcal{H}}^*(u+\Delta u, t) \rangle_t$$

en observant $\langle \hat{I}(u, t) \,.\, \hat{I}^*(u+\Delta u, t) \rangle_t$

puis en calibrant $\langle \widehat{\mathcal{H}}(u, t) . \widehat{\mathcal{H}}^*(u+\Delta u, t) \rangle_t$ sur une étoile ponctuelle de référence.

5.1.2 Intégration du gradient de phase.

Il reste maintenant à remonter à $\widehat{O}(u)$ à partir de $|\widehat{O}(u)|^2 \exp[\, i\Delta\varphi_{obj}(u, u+\Delta u)\,]$. C'est une simple intégration :

a) on fixe arbitrairement $\varphi_{obj}(u) = 0$ pour $u = 0$.

b) on remonte à la phase de $\widehat{O}(u)$ pour toutes les fréquences spatiales u en intégrant le gradient de phase $\Delta\varphi_{obj}(u_i, u_i+\Delta u)$:

$$\varphi_{obj}(u) = \sum_{u_i = 0}^{u} \Delta\varphi_{obj}(u_i, u_i+\Delta u) \qquad (5.III)$$

Cette opération intègre aussi les erreurs de mesure sur $\Delta\varphi_{obj}$ d'où une certaine instabilité de la méthode. Comme u est un vecteur à deux dimensions, il y a plusieurs chemins possibles pour aller de 0 à une fréquence spatiale u donné. Des algorithmes appropriés tirent parti de cette redondance pour réduire le bruit.

c) Connaissant $|\widehat{O}(u)|$ et $\varphi_{obj}(u)$ pour tout u jusqu'à la fréquence de coupure, on construit :

$$\widehat{O}(u) = |\widehat{O}(u)| \exp[\, i\varphi_{obj}(u)\,]$$

et finalement on obtient O(x) par TF inverse de $\widehat{O}(u)$.

5.1.3 Application aux situations de faible luminosité.

La méthode de Knox & Thompson peut être utilisée telle quelle, ou bien dans l'espace des autocorrélations pour tirer parti de la structure en comptage de photons des images, de la même façon que pour la méthode des tavelures.

Au lieu de travailler dans le plan de Fourier en observant :

$$\hat{k}(u) = \hat{I}(u) \,.\, \hat{I}^*(u+\Delta u)$$

on peut travailler dans le plan des autocorrélations en observant sa TF inverse :

$$K(a) = I(x) * \int \hat{I}^*(u+\Delta u) \exp(2i\pi ux)\, du$$

on définit $u' \equiv u+\Delta u \;\Rightarrow\; du = du'$

$$K(a) = I(x) * \int \hat{I}^*(u') \exp[2i\pi (u' - \Delta u) x]\, du'$$

$$= I(x) * \int [\hat{I}^*(u') . \exp(-2i\pi \Delta u\, x)] \exp(2i\pi u' x)\, du'$$

$$= I(x) * [I(-x) . \exp(-2i\pi \Delta u\, x)]$$

$$= \int I(x+a) .\ I(x) . \exp(+2i\pi \Delta u\, x) \qquad (5.IV)$$

Si l'on représente I(x) sous forme d'une somme de distributions, on a :

$$K(a) = \int \sum_i^p \delta(x-x_i+a) .\ \sum_j^p \delta(x-x_j) . \exp(-2i\pi \Delta u\, x)\ dx$$

Comme $\delta(x-x_i)$ est nul partout sauf en $x = x_i$ l'intégrale devient :

$$K(a) = \sum_i^p \sum_j^p \delta(x_i-x_j+a) . \exp(-2i\pi \Delta u\, x_i) \qquad (5.V)$$

x_i est la coordonnée du i ème photon dans l'image à courte pose,
p est le nombre total photons dans cette image.

Le temps de calcul de (5.V) , de même que pour la méthode des tavelures, est indépendant de la taille des images et ne dépend que du carré du nombre de photons.

Aussi bien dans son mode TF que dans son mode AC, la méthode de Knox - Thompson n'utilise qu'une partie de l'information de phase disponible dans les images. Elle est simple à mettre en oeuvre, cependant, et très utilisée. Sa première description date de 1977, son auteur était étudiant et en a fait sa thèse.

5.2 Méthodes bispectrales.

5.2.1 Mesure du bispectre.

Découvertes il y a une dizaine d'années, ces méthodes gèrent la totalité de de l'information de phase. Elles permettant une reconstruction plus robuste des images et fonctionnent même si le plan des fréquences spatiales n'est mesurable que pour quelques valeurs isolées de u, ce que ne permet pas la méthode de Knox & Thompson. (c'est le cas pour les interféromètres à plusieurs télescopes) .

---

exercice 5.1 :
Montrer pourquoi la méthode de Knox & Thompson ne permet pas de reconstruire la phase de $\widehat{O}(u)$ dans les cas où $\hat{I}(u)$ est connu seulement en 0 et en u.

On part toujours de a relation de convolution entre objet et image définie en (1.II) :

$$\hat{I}(u) = \widehat{O}(u) \ . \ \widehat{\mathcal{H}}(u)$$

Mais au lieu de considérer le spectre des images on considère leur bispectre, défini par:

$$\hat{I}^{(3)}(u, v) \equiv \hat{I}(u) \, . \, \hat{I}(v) \, . \, \hat{I}(-u-v) \qquad (5.VI)$$

u et v étant des fréquences spatiales arbitraires. Ce sont des vecteurs à deux dimensions, $I^{(3)}(u, v)$ est donc défini dans un espace à quatre dimensions.

Si l'on applique (5.VI) à l'équation de base (1.II) on a la relation :

$$\hat{I}^{(3)}(u, v) = \widehat{O}^{(3)}(u, v) \, . \, \widehat{\mathcal{H}}^{(3)}(u, v) \qquad (5.VII)$$

$\widehat{\mathcal{H}}^{(3)}(u, v)$ est la fonction de transfert bispectrale. On va démontrer que $\widehat{\mathcal{H}}^{(3)}(u, v)$ est réelle, donc de phase nulle, en première approximation. Dans cette démonstration, on ne fait aucune hypothèse sur la nature de $\widehat{\mathcal{H}}(u)$. C'est là que réside la puissance de cette méthode : elle est valable quelles que soient les aberrations, qu'elles soient statiques ou variables dans le temps n'a plus d'importance.

Reprenons la définition de $\widehat{\mathcal{H}}(u)$ donnée en (2.II) :

$$\widehat{\mathcal{H}}(u) = \int D(x) \, D(x - \lambda f u) \exp[\, i \, \sigma \, \Delta L(x, \ x - \lambda f u) \,] \, dx$$

Supposons pour commencer que l'ouverture de l'instrument soit très grande :

$$D(x) = 1 \ \forall \ x \quad \Rightarrow \qquad \widehat{\mathcal{H}}(u) = \int \exp[\, i \, \sigma \, \Delta L(x, \ x - \lambda f u) \,] \, dx$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{H}}^{(3)}(u, v) = & \int \exp[\, i \, \sigma \, \Delta L(x, \ x - \lambda f u) \,] \, dx \\ & . \int \exp[\, i \, \sigma \, \Delta L(x', \ x' - \lambda f v) \,] \, dx' \\ & . \int \exp[\, i \, \sigma \, \Delta L(x'', \ x'' + \lambda f u + \lambda f v) \,] \, dx'' \end{aligned}$$

Pour intégrer, il faut faire parcourir à x, x' et x'' toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$. On peut satisfaire à ce critère tout en reliant x, x' et x'' entre eux par des relations de translation constante, par exemple :

$$x' = x - \lambda f u \quad \text{et} \quad x'' = x' - \lambda f v \ .$$

On obtient alors :

$$\widehat{\mathcal{H}}^{(3)}(u, v) = \iiint \exp i \, \sigma \, [\Delta L(x, x - \lambda f u) + \Delta L(x', x' - \lambda f v) + \Delta L(x'', x'' + \lambda f u + \lambda f v)] \, dx \, dx' dx''$$

Les ΔL sont maintenant calculés sur un parcours clos : de x à $x-\lambda fu$ puis à $x-\lambda fu-\lambda fv$, puis retour à x. La somme des ΔL sur ce parcours est nulle et l'on a :

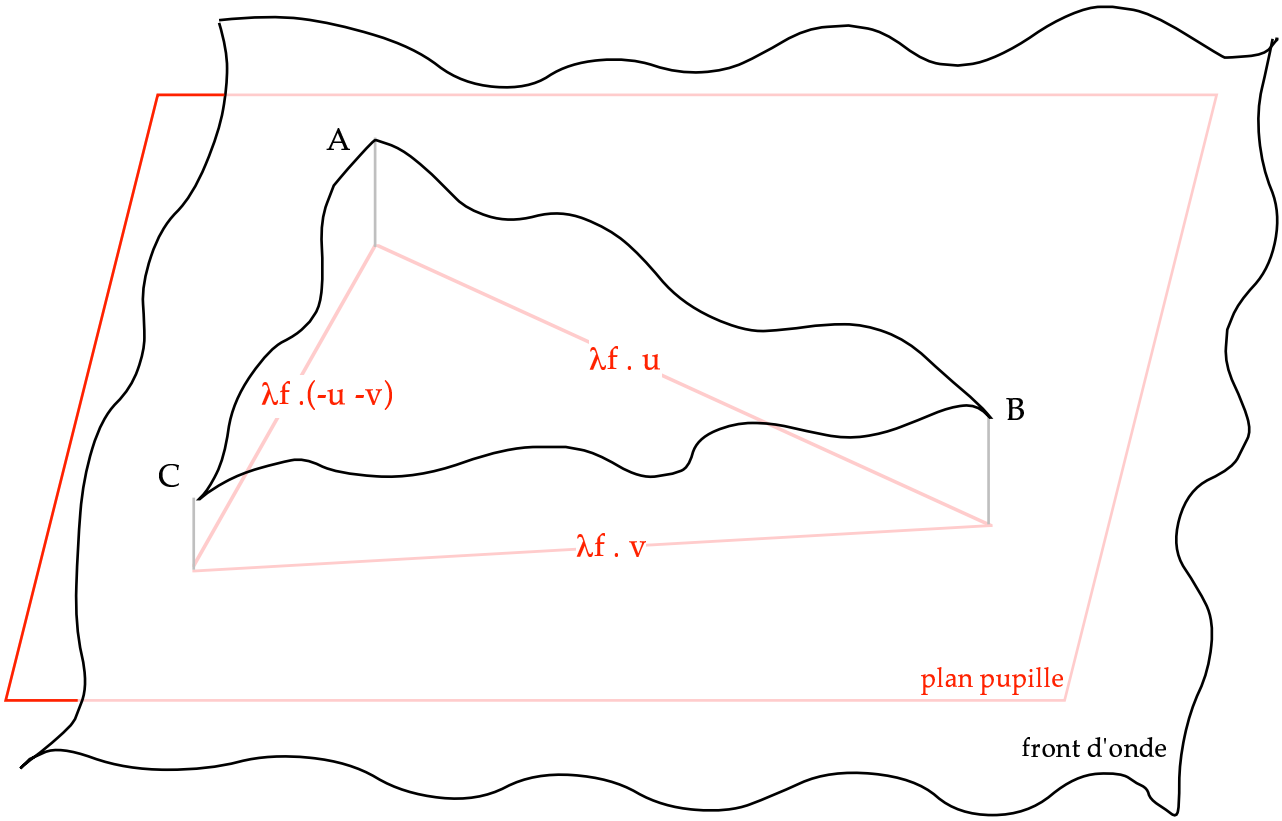
$$\widehat{\mathcal{H}}^{(3)}(u, v) = \iiint \exp(0) \, dx = \iiint dx \, dx' \, dx' = \text{constante}$$

Pour obtenir ce résultat, on a tout de même fait un hypothèse sur $\widehat{\mathcal{H}}(u)$: que c'est la fonction de transfert qui n'a que des aberrations de phase, un sous-ensemble

particulier des fonctions possibles de u. Cette fonction de transfert est déduite d'un front d'onde (arbitraire) par le théorème de Van Cittert Zernike et en cela elle a des propriétés particulières, mises en évidence par le bispectre.

La fonction représentant un objet quelconque O (x) n'a pas ces contraintes, la phase de de son bispectre, $\widehat{O}^{(3)}$ (u, v) n'a aucune raison d'être nulle. Elle va permettre de remonter à la phase de $\widehat{O}$(u).

On peut faire une analogie entre le bispectre et la clôture de phase utilisée en interférométrie radio, découverte en 1945, oubliée puis redécouverte en 1965. Prenons une source ponctuelle à l'infini et trois radio-télescopes placés en A, B et C :



Pour trois points A, B, C choisis arbitrairement dans le plan pupille, on a :

$$Xb - Xa = \lambda f \,.\, u$$
$$Xc - Xb = \lambda f \,.\, v$$
$$Xa - Xc = \lambda f \,.\, (-u - v)$$

A chaque couple de points dans le plan pupille : A-B, B-C et C-A correspond une ligne de base et une mesure dans le plan de Fourier :

base A-B -> $\widehat{\mathcal{H}}$(u)

base B-C -> $\widehat{\mathcal{H}}$(v)

base C-A -> $\widehat{\mathcal{H}}$(-u-v)

La phase de $\widehat{\mathcal{H}}$(u) est proportionnelle à la différence de chemin optique entre l'onde au point A et l'onde au point B.

Si l'on mesure la différence de chemin optique entre A et B, puis entre B et C et enfin entre C et A, on a parcouru un trajet clos. La somme des trois différences de chemin optique est nulle.

La somme des phases de $\widehat{\mathcal{H}}(u)$, $\widehat{\mathcal{H}}(v)$ et $\widehat{\mathcal{H}}(-u-v)$ est nulle.

Lorsque l'objet pointé n'est pas ponctuel, la somme des trois phases observées n'est en général plus nulle ; elle correspond à un point de la phase du bispectre (ou phase bispectrale) de l'objet.

Si l'on considère maintenant que D(x) = 0 au delà d'une certaine limite (le diamètre de l'instrument n'est pas infini), il reste un terme de phase non nul dans le bispectre de la fonction de transfert, correspondant aux clôtures incomplètes : celles où l'un de points du triangle est en dehors de l'ouverture du télescope. Ce terme est faible mais d'autant plus important que les fréquences spatiales considérées sont proches de la fréquence de coupure ($\Leftrightarrow$ que les triangles sont grands).

La contribution de l'atmosphère étant à valeur moyenne nulle, il ne reste que les aberrations de l'instrument et le bruit de mesure.

On fait alors une moyenne temporelle du bispectre de la fonction de transfert:

$$<\widehat{\mathcal{H}}^{(3)}(u, v, t)>_t$$

Que l'on applique à la relation de convolution pour le bispectre :

$$<\hat{I}^{(3)}(u, v, t)>_t = \widehat{O}^{(3)}(u, v) \,.\, <\widehat{\mathcal{H}}^{(3)}(u, v, t)>_t$$

Après calibration de $<\widehat{\mathcal{H}}^{(3)}(u, v, t)>_t$ sur une étoile de référence on inverse la relation de convolution pour trouver le bispectre de l'objet :

$$\widehat{O}^{(3)}(u, v) = <\hat{I}^{(3)}(u, v, t)>_t \,/\, <\widehat{\mathcal{H}}^{(3)}(u, v, t)>_t \qquad (5.VIII)$$

Les vecteurs u et v étant à deux dimensions, le bispectre est de dimension quatre, les exigences de cette méthode en moyens de calcul ne sont vraiment satisfaits que par des machines puissantes, et aux prix d'astuces de programmation.

---

exercice 5.2:

Combien de mémoire occupée bispectre d'une image de 512 par 512 codée sur un octet par pixel ?

réponse : 68 719 476 736 octets

5.2.2 Application dans l'espace des autocorrélations.

La correspondance au bispectre dans l'espace direct est la triple corrélation :

$$I^{(3)}(a, b) = \int I(x) \,.\, I(x+a) \,.\, I(x+b)\, dx \qquad (5.IX)$$

C'est sous cette forme que les techniques bispectrales furent initialement découvertes et utilisées en 1983 par G. Weigelt. La liaison entre triple corrélation et

bispectre d'une part, et clôture de phase d'autre part fut mise en évidence par F. Roddier en 1985. L'équivalence entre les formules (5.VI) et (5.IX) découle de la relation entre TF et autocorrélation :

Le bispectre de I(x) s'exprime par (eq 5.VI) :

$$\hat{I}^{(3)}(u, v) = \hat{I}(u) \,.\, \hat{I}(v) \,.\, \hat{I}(-u-v)$$

$$= \int I(x'') \exp(-2i\pi u x'')\, dx'' \,.\, \int I(x') \exp(-2i\pi v x')\, dx' \,.\, \int I(x) \exp[-2i\pi(-u-v)\, x]\, dx$$

Les trois variables x, x' et x'' sont indépendantes $\Rightarrow$

$$= \iiint I(x'') \,.\, I(x') \,.\, I(x) \exp(-2i\pi u x'') \,.\, \exp(-2i\pi v x') \,.\, \exp[-2i\pi(-u-v)\, x']\, dx''\, dx'\, dx$$

$$= \iiint I(x'') \,.\, I(x') \,.\, I(x) \exp[-2i\pi\,(u x'' + v x' - u x - v x)]\, dx''\, dx'\, dx$$

$$= \iiint I(x'') \,.\, I(x') \,.\, I(x) \,.\, \exp[-2i\pi\, u(x''-x)] \,.\, \exp[-2i\pi\, v(x'-x)]\, dx''\, dx'\, dx$$

On définit : $a \equiv x''-x$ et $b \equiv x'-x$

$$= \iiint I(x'') \,.\, I(x') \,.\, I(x) \,.\, \exp(-2i\pi\, ua) \,.\, \exp(-2i\pi\, vb)\, dx''\, dx'\, dx$$

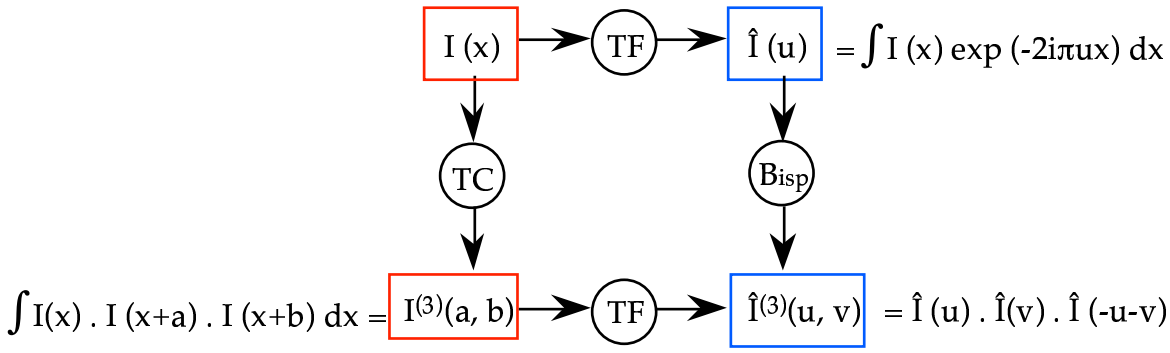
A x'' constant, on peut écrire : $dx'' = da$ $dx' = db$

$$= \iiint I(x+a) \,.\, I(x+b) \,.\, I(x) \,.\, \exp(-2i\pi\, ua) \,.\, \exp(-2i\pi\, vb)\, da\, db\, dx$$

$$= \iint \left[\int I(x+a) \,.\, I(x+b) \,.\, I(x)\, dx\right] \exp(-2i\pi\, ua)\, \exp(-2i\pi\, vb)\, da\, db$$

$$= \iint I^{(3)}(a, b) \,.\, \exp(-2i\pi\, ua) \,.\, \exp(-2i\pi\, vb)\, da\, db$$

Le bispectre est donc la transformée de Fourier de la triple corrélation. On peut récapituler ceci dans le tableau suivant :



5.2.3 Triple corrélation en comptage de photons

On peut lui associer un mode de calcul adapté pour les images à comptage de photons. Si l'on met I(x) sous la forme d'une somme discrète, on obtient :

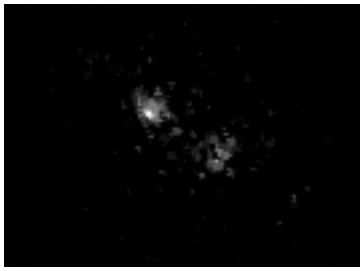
$$I^{(3)}(a, b) = \int I(x) \,.\, I(x-a) \,.\, I(x-b)\, dx$$

$$= \int \sum_i^p \delta(x-x_i) \,.\, \sum_j^p \delta(x-x_j-a) \,.\, \sum_k^p \delta(x-x_k-b) \quad dx$$

$$= \sum_i^p \left[\sum_j^p \delta(x_i-x_j-a) \,.\, \sum_k^p \delta(x_i-x_k-b) \right]$$

Dont le temps de calcul dépend de n^3, n étant le nombre de photons, mais reste indépendant de la taille des espaces image et surtout bispectral.

Pour réduire l'espace de travail, qui est de dimension 4, on peut se contenter de ne calculer qu'un plan de la triple corrélation, auquel cas le temps de calcul ne dépend que de n^2. On est alors proche des performances (et du principe) de la méthode de Knox & Thompson.



Etoile triple HR 8652 observée au pic du midi
Plan décalé de la triple corrélation correspondant à une image. Les trois taches les plus brillantes correspondent à l'image des trois étoiles. Le reste est du bruit provenant principalement de la nature en comptage de photons des images de départ. La séparation des deux composantes rapprochées en bas à droite est de 70 millisecondes d'arc.

5.2.3 Comment remonter du bispectre au spectre.

Appelons B l'opérateur qui fait passer du spectre au bispectre :

$$\widehat{O}(u) \;\text{->}\; \textcircled{B} \;\text{->}\; \widehat{O}^{(3)}(u, v)$$

B part d'un espace de dimension 2 et a son image dans un espace de dimension 4. Il correspond à une matrice dont on peut trouver l'inverse généralisé. On utilise pour cela des méthodes itératives numériques qui tiennent compte d'un éventuel bruit de mesure (méthodes par moindres carrés) et du fait que la fonction de transfert n'est pas forcément connue partout. Elles sont enseignées en DEA.

---

exercice 5.3 :

Le bispectre $\hat{I}^{(3)}(u, v)$ permet-il de retrouver facilement le module carré de $\hat{I}(u)$?

indice : exprimer $\hat{I}^{(3)}(u, 0)$ et tenir compte du fait que I(x) est réel.

---

6. Optique adaptative.

Dans les techniques précédentes de reconstructions d'image, on mesurait de plusieurs façons possibles la fonction de transfert, dans le but de corriger les aberrations qu'elle induisait dans les images. Maintenant on va *agir* directement et en temps réel sur la fonction de transfert, de manière à rendre H(x) le plus ponctuel possible.

On part toujours de la relation liant l'image à l'objet.

$$\hat{I}(u) = \widehat{O}(u) \ . \ \widehat{\mathcal{H}}(u)$$

On a vu que :

$$\widehat{\mathcal{H}}(u) = \int D(x)\, D(x-\lambda fu) \ . \ A(x) A^*(x-\lambda fu)\, d$$

La contribution de l'atmosphère à la fonction de transfert peut se décomposer en phase et module :

$$A(x) = \ |A(x)| \ \exp[\, i\, \varphi(x)\,]$$

C'est sur la phase que l'on va agir : on introduit dans le faisceau une "correction" de phase $\varphi_c(x)$ telle que l'on ait après correction :

$$A_{corrigé}(x) = |A(x)| \ \exp i\, [\varphi(x) - \varphi_c(x)]$$

avec $\varphi(x) - \varphi_c(x)$ le plus petit possible de telle sorte que l'on tende vers :

$$A_{corrigé}(x) = |A(x)| \ \exp(0) = |A(x)|$$

on a alors :

$$\widehat{\mathcal{H}}(u) = \int D(x)\, D(x-\lambda fu) \ . \ |A(x)| \ . \ |A(x-\lambda fu)| \ dx$$

L'intégrande est réel. les fluctuations de $|A(x)|$ restent responsables d'un léger affaiblissement de $\widehat{\mathcal{H}}(u)$ par rapport à la fonction de transfert sans aberration.

Pour mettre ceci en pratique il faut deux choses :

- Mesurer les défauts de phase $\varphi(x)$ sur le front d'onde dans le plan pupille.
- Introduire dans le faisceau les corrections $\varphi_c(x)$.

6.1 mesure de $\varphi(x)$

Il n'est pas possible de remonter à $\varphi(x)$ à partir de $H(x_i)$ seul, la relation n'est pas bijective, plusieurs fronts d'onde différents pouvant donner la même réponse impulsionelle... mais il n'est pas interdit de mesurer l'onde dans d'autres plans que le plan image.

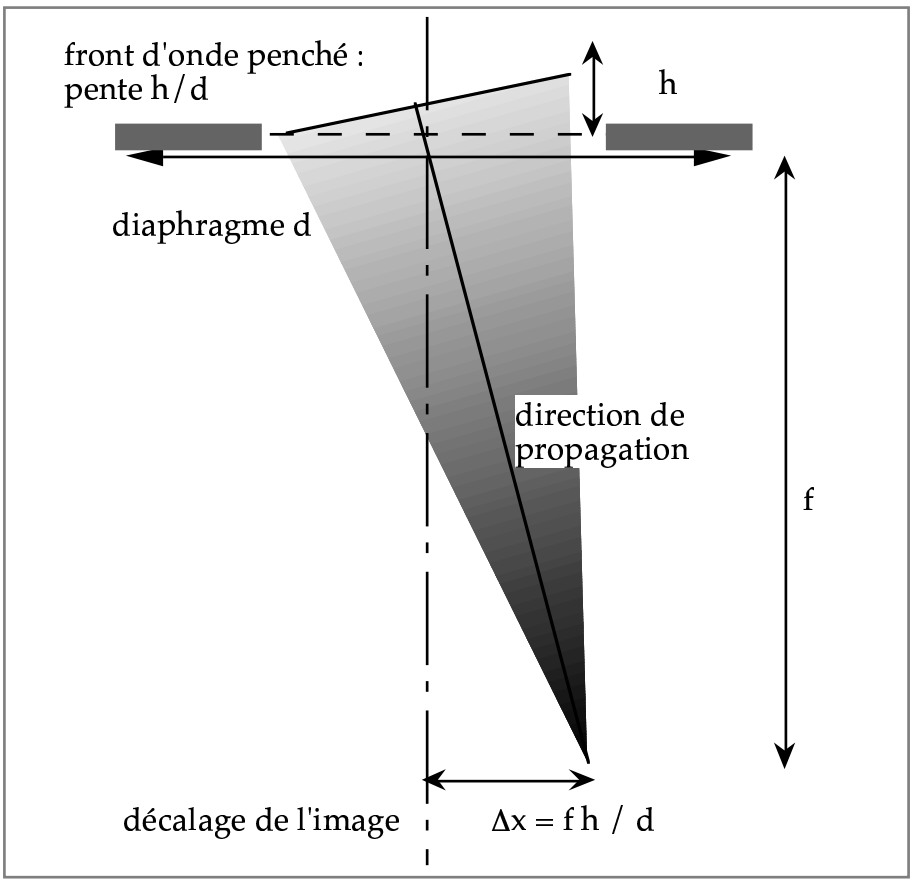
6.1.1 Mesure de la courbure du front d'onde: méthode de Roddier.

En soustrayant deux images défocalisées, prises dans des plans décalés de part et d'autre du plan image selon l'axe z (propagation), on a accès à la courbure locale (Laplacien) du front d'onde et on peut reconstruire celui-ci en tout point par double intégration. C'est une des techniques utilisées sur le télescope CFH de 3,6 m de diamètre (Hawaii).

6.1.2 Mesure de la pente du front d'onde : méthode de Shack - Hartmann.

On peut aussi mesurer $\varphi(x)$ par un découpage du front d'onde incident en petites zones, considérant celui-ci comme plan dans chaque zone. C'est la technique de Shack-Hartmann, connue des opticiens pour le contrôle de la qualité optique des grands miroirs. Cette méthode donne le gradient du front d'onde.

On prend une source ponctuelle à l'infini (étoile de référence) et l'on place au plan pupille une série de lentilles de petit diamètre.

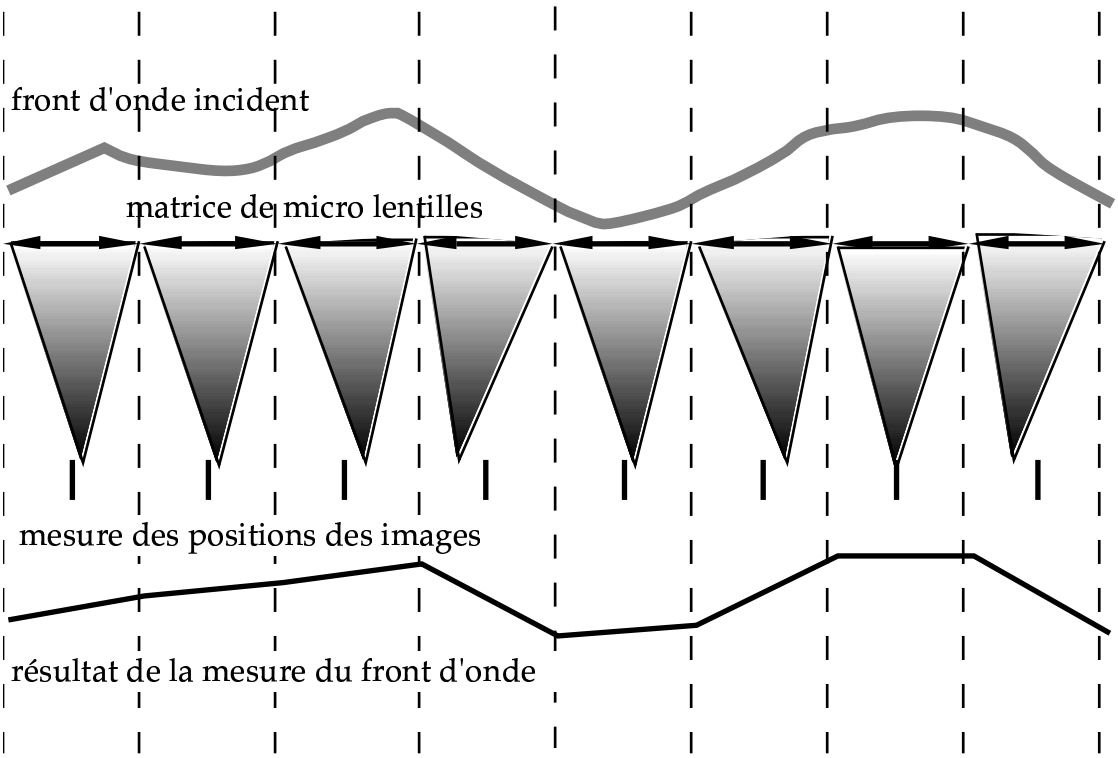


Le front d'onde sur la pupille peut localement être assimilé à sa tangente. Entre deux points x et x' du front d'onde le déphasage s'approxime par :

$$h = \varphi(x') - \varphi(x) \approx (x' - x) \,.\, \Delta\varphi(x)$$

où $\Delta\phi(x)$ est le gradient de la phase au point x.

Localement, on peut mesurer $\Delta\varphi(x)$ à partir de la pente du front d'onde. On trouve celle-ci localement à partir du décentrage de l'image donnée par la micro-lentille qui échantillonne cette partie du front d'onde. On remonte au front d'onde par intégration des gradients.



Pour que le front d'onde puisse être considéré comme plan à l'intérieur d'une zone échantillonnée, il faut que celle-ci soit d'une taille comparable à r_o. r_o =20 cm en moyenne pour λ = 0.5 µm, et 1 m dans l'infra-rouge à 2 µm. Pour que la mesure soit fiable, il faut de plus qu'elle soit faite en un temps court devant τ_o, le temps de cohérence de l'atmosphère (quelques millisecondes). On dispose donc de peu de photons pour faire la mesure, et cette technique est limitée aux zones du ciel entourant une étoile relativement brillante (magnitude < 13) pouvant servir de source pour l'échantillonnage du front d'onde.

Exercice 6.1 : Donner le rapport des flux limites (sensibilité) permettant de reconstruire le front d'onde entre le visible (λ = 0.5 µm) et l'infra-rouge (λ = 2.2 µm), sachant que r_o , et τ_o sont proportionnels à $\lambda^{6/5}$.

Quel est des deux le domaine de longueur d'onde le plus favorable ?

6.2 Étoiles artificielles.

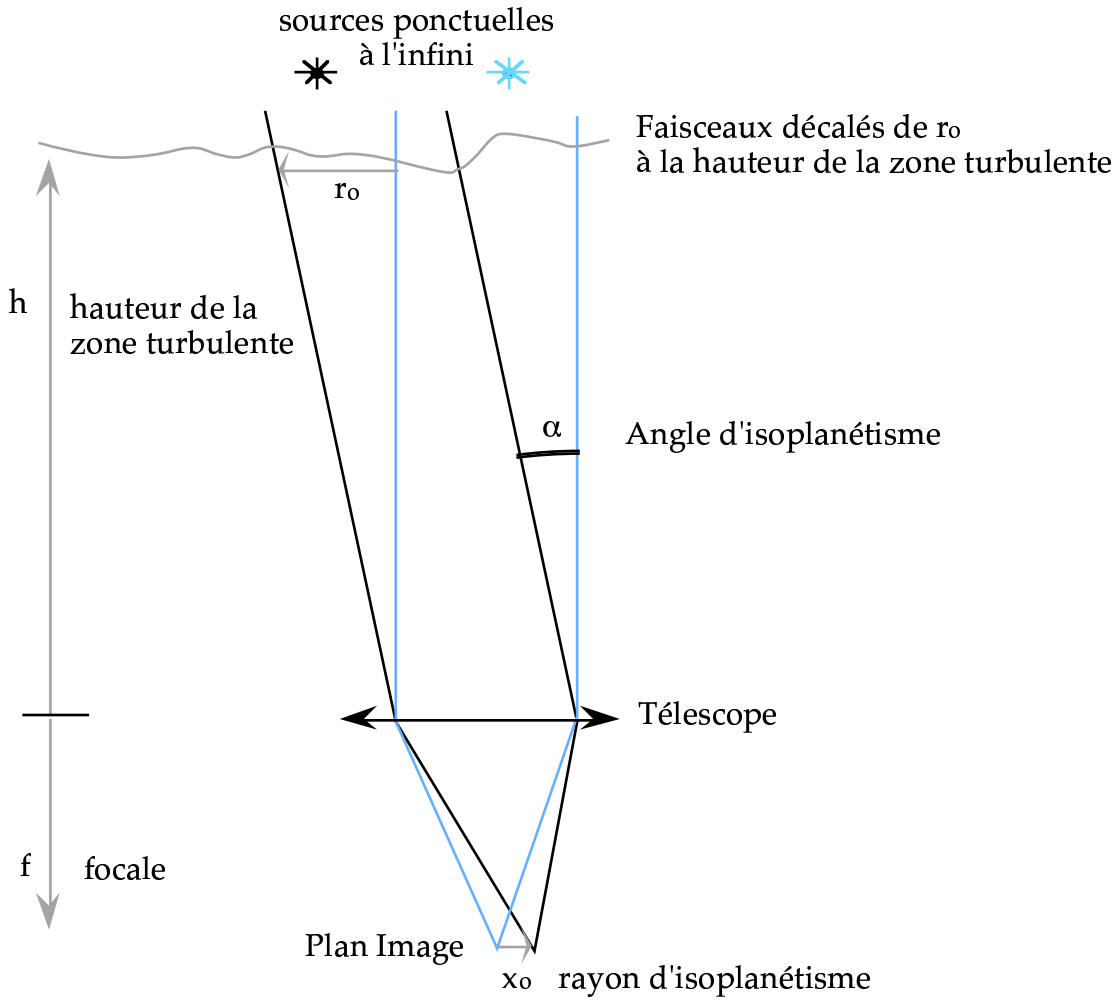
6.2.1 Isoplanétisme

Le fait d'avoir une relation de convolution entre objet et image :

$$I(x_i) = O(x_g) * \mathcal{H}(x_g)$$

ne tient que si $\mathcal{H}(x_g)$ reste la même fonction pour tout point de l'objet, on appelle

cette condition l'isoplanétisme. On peut déterminer un champ maximal de rayon x_o pour lequel on considère que la stabilité de la fonction de transfert est satisfaisante. C'est le champ d'isoplanétisme. Si l'on fait l'hypothèse que les perturbations sur l'image sont causées par une zone turbulente localisée à une altitude donnée h, on a une relation simple entre x_o , champ d'isoplanétisme et r_o , paramètre de Fried : $x_o/f = r_o/h = \alpha$.



Dans ce schéma, les deux images des sources ponctuelles sont juste séparées par le rayon d'isoplanétisme. Pour une séparation plus grande, elles ne seraient plus affectées par la même réponse impulsionelle.

L'optique adaptative ne corrige bien que le front d'onde mesuré, pas un front d'onde en provenance d'une autre direction qui se serait propagé dans un milieu turbulent différent, donnant une fonction de transfert différente. Le champ de la correction est donc limité par le rayon d'isoplanétisme.

---

exercice 6.2 :

1) Calculer le champ angulaire d'isoplanétisme pour h = 2 km et r_o= 0.2 m.

2) Sachant qu'il faut au moins une étoile ponctuelle de référence par champ

d'isoplanétisme, combien en faut-il pour couvrir tout le ciel ?

3) Calculer l'éclairement minimum d'une source de référence en photons / s permettant de mesurer le front d'onde par la méthode de Shack-Hartmann. Faites l'hypothèse qu'il faut au moins un photon par zone à mesurer, supposée circulaire de diamètre r_o , et que la mesure doit être faite en un temps inférieur à τ_o = 2 ms. Le diamètre du télescope est D = 8 m.

4) Y a-t-il assez d'étoiles suffisamment brillantes dans le ciel pour disposer d'une source de référence dans le champ d'isoplanétisme quel que soit le pointage ?

6.2.2 Étoiles Lasers

Si l'on ne dispose pas d'une étoile permettant la mesure du front d'onde dans la zone du ciel voulue, on peut toujours en placer une... La solution a été proposée par Labeyrie et Foy en 1985 : un laser tire depuis le sol et son faisceau est diffusé par les hautes couches de l'atmosphère. Vu d'une direction proche de celle du faisceau cela crée une source quasi ponctuelle à 80 km d'altitude. Il suffit d'un laser pulsé de 100 watts à quelques kilowatts de puissance moyenne collimaté par le télescope lui-même pour obtenir une référence satisfaisante. On sélectionne l'altitude en retardant l'échantillonnage du front d'onde par rapport à l'envoi pulse laser par un temps correspondant au trajet aller et retour de la lumière.

Cette solution n'a pas que des avantages : outre le danger et la pollution lumineuse, on n'est pas totalement débarrassé des effets de l'atmosphère, qui agissent sur le faisceau lors du trajet ascendant.

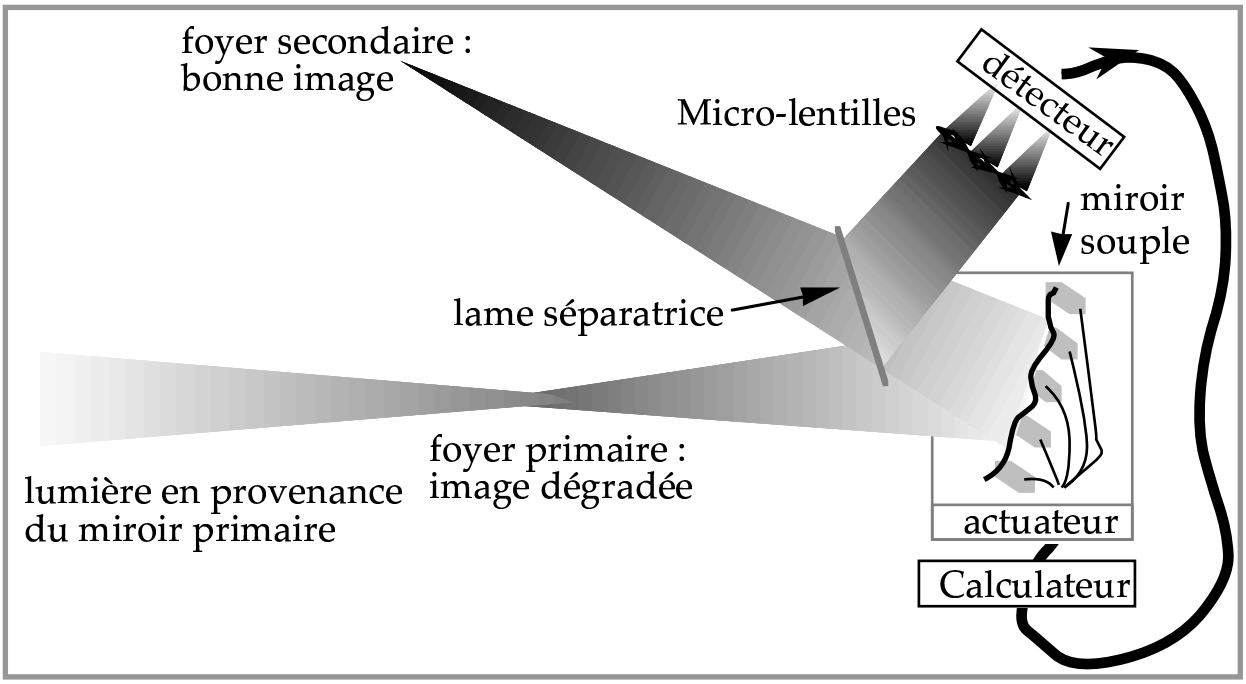
L'étape ultime dans la lutte contre la turbulence atmosphérique, c'est de carrément supprimer l'atmosphère. Avant que les militaires nous trouvent une solution (définitive ?) pour l'optique au sol, on peut toujours aller dans l'espace.

6.3 Actuateurs

Dans l'expression de base de l'optique adaptative :

$$A_{corrigé}(x) = |A(x)| \exp i\,[\varphi(x) - \varphi_c(x)]$$

Nous avons vu comment on mesurait $\varphi(x)$. Il reste maintenant à introduire dans le faisceau la correction de phase appropriée : $\varphi_c(x) = -\varphi(x)$ de manière à annuler les effets de phase introduits par l'atmosphère. On met pour cela un miroir souple dans le faisceau. La surface de ce miroir sera déformée localement à l'aide de supports piézo-électriques et ces déformations introduiront des déphasages égaux à $\varphi_c(x)$. La mise en pratique consiste en un asservissement de l'actuateur sur le front d'onde détecté :



Cette technique est opérationnelle depuis quatre ans environ sur plusieurs télescopes de 4 m. Elle ne fonctionne sur ceux-ci que dans l'infra-rouge. Son extension au domaine visible fait l'objet d'un projet (non financé pour le moment) sur le télescope de 2 m du pic du midi. Il est à prévoir que d'ici quelques années des systèmes modulaires s'adaptant en aval des télescopes seront vendus clés en main à bas prix.

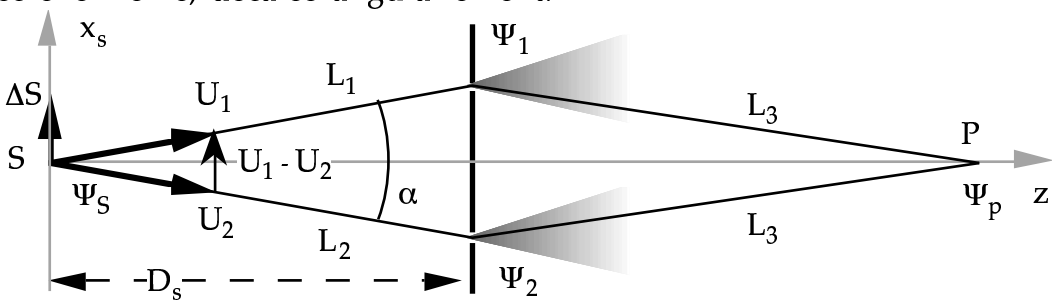
7. Synthèse d'ouverture

7.1 Bases

Cette technique consiste à pointer plusieurs télescopes sur le même objet et recombiner (faire interférer) les faisceaux entre eux. Le groupe de télescopes se comporte comme un seul miroir (ouverture). On peut faire de l'interférométrie avec de la lumière visible, ou dans d'autres domaines de longueur d'onde comme en radio-astronomie. Les distances entre télescopes sont appelées bases, la base maximale (plus grande distance possible séparant deux télescopes du groupe) correspond à la fréquence spatiale maximale u_{max} pour laquelle la fonction de transfert $\widehat{\mathcal{H}}(u)$ n'est pas nulle. C'est l'équivalent de la fréquence de coupure pour une ouverture pleine. Un réseau de télescopes a donc potentiellement la puissance d'une ouverture virtuelle qui engloberait tout le groupe de télescopes. On arrive à des résolutions de quelques micro-secondes d'arc. En optique, pour connaître $\widehat{\mathcal{H}}(u)$ on analyse la figure d'interférences formée par les faisceaux recombinés. En radio-astronomie, pour le même résultat on intercorrèle électroniquement les signaux des différentes antennes.

7.2 Rappels sur la cohérence spatiale

La **cohérence spatiale** (ou angulaire) caractérise l'étendue angulaire d'une source lumineuse, et l'onde émise. Une source qui serait ponctuelle donnerait une onde de cohérence spatiale infinie. Pour mesurer la cohérence spatiale, on fait interférer une onde avec elle-même, décalée angulairement.



Source ponctuelle

Dans le montage des franges d'Young ci-dessus, une source en S émet une onde :

$$\Psi_s = A_s \exp(i\,\omega\,t)\,.$$

Un écran percé de deux trous forme deux sources secondaires émettant Ψ_1 et Ψ_2 .

$$\Psi_1(L_1) = \Psi_S\ [\exp(ik\,.\,L_1)\,/\,i\lambda L_1] \quad ; \quad \Psi_2(L_2) = \Psi_S\ [\exp(ik\,.\,L_2)\,/\,i\lambda L_2]$$

Si L_1 et L_2 sont comparables et que $(L_1 - L_2) << L_1$ on peut approximer Ψ_1 et Ψ_2 par :

$$\Psi_1 = A \exp(i\,\omega\,t - 2i\pi\,L_1/\lambda) \quad ; \quad \Psi_2 = A \exp(i\,\omega\,t - 2i\pi\,L_2/\lambda)$$

Le facteur A tient compte de l'amplitude A_s de la source et de l'affaiblissement du à la propagation source-écran. On met un détecteur en P, à distance L_3 en aval des deux sources secondaires. On observe en P, à une constante près la somme de Ψ_1 et Ψ_2:

$$\Psi_p = (\Psi_1 + \Psi_2)\,.$$

l'intensité en P est donnée par :

$$I_p = |\Psi_1 + \Psi_2|^2 = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + \mathrm{Re}\,(\Psi_1\ \Psi_2^*) + \mathrm{Re}\,(\Psi_1^*\ \Psi_2)\,,$$

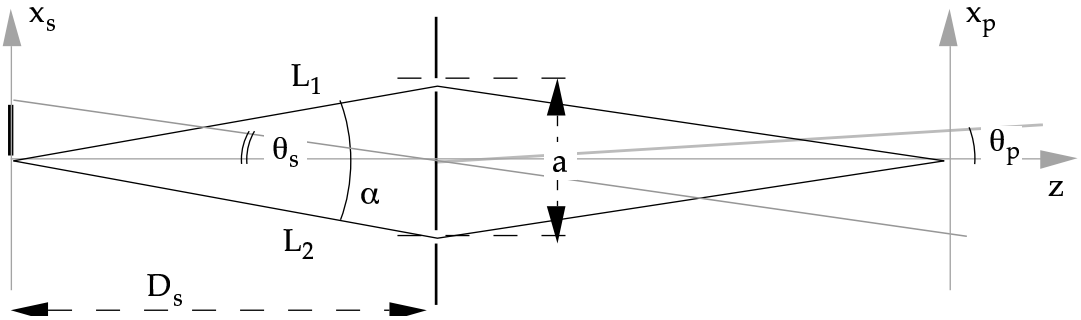
$$I_p = 2A^2 [1 + \cos (2\pi (L_2 - L_1)/\lambda] .$$

Si on déplace la source S d'une quantité $\Delta\mathbf{S}$,

$$L_2 - L_1 = (\mathbf{U_2} - \mathbf{U_1}) . \Delta\mathbf{S} .$$

$\mathbf{U_1}$, $\mathbf{U_2}$ et $\Delta\mathbf{S}$ sont des vecteurs. Un déplacement de S selon l'axe z n'aura pas d'effet sur le déphasage de Ψ_1 par rapport à Ψ_2 . Par contre, si $\mathbf{U_2} - \mathbf{U_1}$ et $\Delta\mathbf{S}$ sont parallèles, on aura un déphasage

$$\Delta\phi = 2\pi [(\mathbf{U_2} - \mathbf{U_1}) . \Delta\mathbf{S}] /\lambda = 2\pi \; 2 \sin (\alpha/2) /\lambda \approx 2\pi \; \alpha \, \Delta S /\lambda$$



$$I_p (x_s) = 2 I_o \; [1 + \cos (2\pi \, \alpha x_s /\lambda)]$$

On peut exprimer I_p en fonction de la position angulaire θ_s de la source, et la séparation a entre S_1 et S_2 . Avec l'approximation des petits angles,

$$\theta_s = x_s / D_s \;\; ; \; a = \alpha \, D_s \quad \Rightarrow \quad I_p (\theta_s) = 2 I_o \; [1 + \cos (2\pi \, a \, \theta_s /\lambda)]$$

Source étendue

Si l'on considère l'intensité image non plus seulement au point P (sur l'axe z) mais aussi en dehors de l'axe à un angle θ_p, on peut définir :

$$I_p (\theta_p , \theta_s) = 2 I_o \; \{ 1 + \cos (2\pi \, a [\theta_s + \theta_p) /\lambda] \}$$

Si la source n'est pas ponctuelle, les contributions de tous ses points vont s'ajouter pour former Ψ_p. Cela revient à intégrer sur les différentes positions θ_s des points d'intensité I_s formant la source. Les différents points de la source ne sont pas cohérents entre eux, ce sont les intensités dans le plan x_p qui s'ajoutent.

$$I_p (\theta_p) = \int I_p (\theta_p , \theta_s) \, d\theta_s = \int 2 \; I_s (\theta_s) \{ 1 + \cos (2\pi \, a [\theta_p + \theta_s) /\lambda] \} \, d\theta_s$$

Source "rectangulaire", largeur de cohérence

Dans le cas d'une source d'intensité uniforme sur une largeur angulaire $\theta_{s2} - \theta_{s1}$ cela donne:

$$I_p (\theta_p) = 2I_0 \, \Delta\theta \left[1 + \frac{\sin (\pi\Delta\theta \; \mathbf{a}/\lambda)}{\pi\Delta\theta \; \mathbf{a}/\lambda} \cos \left(2\pi(\theta_p + \theta_{so}) \, \mathbf{a}/\lambda\right) \right]$$

La modulation des franges disparaît pour $\Delta\theta \, a/\lambda = 1 \;\Rightarrow\; a = \lambda/\theta$
a est appelée "largeur de cohérence".

On peut exprimer $I_p (\theta_p)$ sous la forme

$$I_p (\theta_p) = \int 2 \, I_s (\theta_s) [1 + \cos 2\pi \, a \, (\varphi_p + \varphi_s)] \, d\theta_s$$

avec $\varphi_p \equiv \theta_p /\lambda$ et $\varphi_s \equiv \theta_s /\lambda$

Si l'on définit par I_o l'intensité totale de la source : $\int I_s(\theta_s)$ on aura

$$I_p(\theta_p) = 2\,I_o + \int 2\,I_s(\theta_s)\,\cos 2\pi\, a\,(\varphi_p + \varphi_s)\,d\theta_s$$

On peut mettre le terme intégral sous la forme d'une exponentielle complexe :

$$\int 2\,I_s(\theta_s)\,\cos 2\pi\, a(\varphi_p + \varphi_s)\,d\theta_s = 2\,\mathrm{Re}\,\{\int I_s(\theta_s)\,\exp[\,2i\pi\, a\,(\varphi_p + \varphi_s)]\,d\theta_s\}$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\,\{\exp(2i\pi\, a\varphi_p)\int I_s(\theta_s)\,\exp(2i\pi\, a\,\varphi_s)\,d\theta_s\}$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\,\{\exp(2i\pi\, a\varphi_p)\;\gamma(a)\}$$

$$= 2\,|\gamma(a)|\,\cos 2\pi\, a\varphi_p$$

$\gamma(a)$ étant la TF spatiale de la source $I_s(\theta_s)$ à une constante multiplicative près. C'est le théorème de **Van Cittert - Zernike**.

Exercice 7.1 : Quelle est la largeur de cohérence d'une source comme le soleil ? ($\theta = 30'$)
et d'une étoile de diamètre angulaire 0.01″ d'arc ?

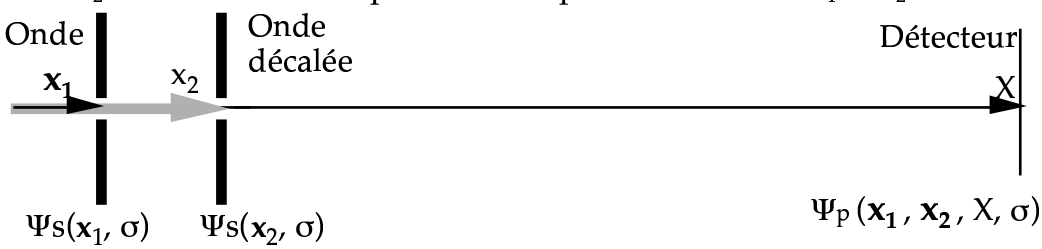
7.3 Rappels sur la Cohérence temporelle (ou spectrale)

Une onde lumineuse non monochromatique peut être décrite par :

$$\Psi(x) = \int \Psi(x, \sigma)\,d\sigma \quad ; \quad \sigma \text{ étant le nombre d'onde : } \sigma \equiv 1/\lambda = k/2\pi\,.$$

Sa cohérence temporelle est liée à son spectre. Une source lumineuse émettant une raie spectrale étroite a plus de cohérence temporelle qu'une autre émettant plusieurs raies ou un spectre large.

Pour mesurer la cohérence temporelle d'une onde, on peut la faire interférer avec elle-même décalée, à l'aide d'un système optique. La position dune source$_1$ et de son image décalée $_2$ étant définies respectivement par les vecteurs $\mathbf{x}_1$ et $\mathbf{x}_2$:



Source monochromatique

Un détecteur placé en X reçoit Ψ_p, la somme des deux ondes.

$$\Psi_p(x_1, x_2, X, \sigma) = \Psi_1(x_1, X, \sigma) + \Psi_2(x_2, X, \sigma)$$

Supposons au départ que les ondes soient monochromatiques :

$$\Psi_1(x_1, X, \sigma) = \Psi_s(\sigma)\,\exp[\,i\,2\pi\,\sigma\,.\,(X - x_1)]$$

$$\Psi_2(x_2, X, \sigma) = \Psi_s(\sigma)\,\exp[\,i\,2\pi\,\sigma\,.\,(X - x_2)]$$

Le détecteur mesure l'intensité associée à Ψ_p :

$$I(x_1, x_2, X, \sigma) = |\Psi_1 + \Psi_2|^2 = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(\Psi_1\,\Psi_2^*)$$

$$= 2I_0 \; [1 + \cos(2\pi\,\sigma\,(x_2 - x_1))]$$

L'intensité $I(x_1, x_2, X, \sigma)$ ne dépend pas de la position X du détecteur mais de la distance $d \equiv x_2 - x_1$ entre les ondes, appelée **différence de marche optique**.

$$I(d, \sigma) = 2I_0 + 2I_0 \cos(2\pi\,\sigma\,d)$$

Source à spectre étendu

Pour généraliser au cas d'une onde polychromatique, on intègre sur le spectre :

$$I(\mathbf{d}) = 2\int I(\sigma)\,d\sigma + 2\int I(\sigma)\cos[2\pi\sigma\,\mathbf{d}]\,d\sigma$$

Le premier terme de l'intégrale est constant. Le deuxième terme est responsable de la modulation de l'intensité quand varie la différence de marche d. Il correspond à la partie réelle de la TF du spectre de l'onde. Théorème de **Wiener - Kintchine** :

$$2\int I(\sigma)\cos[2\pi\sigma\,\mathbf{d}]\,d\sigma = 2\,\mathrm{Re}\left\{\int I(\sigma)\exp[-2i\pi\sigma\,\mathbf{d}]\,d\sigma\right\} = 2\mathrm{Re}\,\{\gamma(\mathbf{d})\}$$

$\gamma(d)$ défini par :

$$\gamma(\mathbf{d}) = \int I(\sigma)\exp[-2i\pi\sigma\,\mathbf{d}]\,d\sigma$$

Source à spectre "rectangulaire", longueur de cohérence

Pour une source à spectre plat de largeur $\Delta\sigma$, la modulation de l'intensité disparaît quand la différence de marche atteint le premier zéro de la fonction $\mathrm{sinc}(2\pi\,\Delta\sigma\,d)$. La valeur de d pour laquelle les franges disparaissent est appelée **longueur de cohérence** ($\mathbf{L_c}$) . On dit que la condition de cohérence spectrale (ou de cohérence temporelle) est satisfaite si $\mathbf{d} < \mathbf{L_c}$.

$$\mathrm{sinc}(\pi\,\Delta\sigma\,\mathbf{L_c}) = 0 \;\Rightarrow\; \pi\,\Delta\sigma\,\mathbf{L_c} = \pi \;\Rightarrow\; \mathbf{L_c} = 1/\Delta\sigma$$

$$\Rightarrow\; \mathbf{L_c} = 1/\Delta(\lambda^{-1}) = \lambda^2/\Delta\lambda$$

La longueur de cohérence $\mathbf{L_c}$ est inversement proportionnelle à la bande passante $\Delta\lambda$.

Ordres de grandeur :

Pour une raie spectrale de longueur d'onde $\lambda = 546$ mn et de largeur $\Delta\lambda = 10$ nm on a $\mathbf{L_c} = 30$ µm. Pour la lumière du soleil vue avec la bande passante de l'oeil on a $\lambda \approx 550$ mn et $\Delta\lambda = (700\text{-}400) = 300$ nm donc $\mathbf{L_c} = 1$ µm.

Exercice 7.2 :

a) On donne une source lumineuse de longueur d'onde $\lambda = 0.6563$ µm et de largeur $\Delta\lambda = 50$ nm. Quelle est sa longueur de cohérence ?

b) On prend un émetteur de radio FM qui émet avec une largeur de bande de 0.05 MHz. Quelle est sa longueur de cohérence ? On considérera que l'on intègre le signal sur un temps long devant la période des notes de musique.

7.4 Performances de l'interférométrie

Un réseau de télescopes n'est pas tout à fait équivalent à une ouverture pleine ayant la même fréquence de coupure. On a bien la même relation de convolution :

$$\hat{I}(u) = \hat{O}(u) \ . \ \widehat{\mathcal{H}}(u) \ ,$$

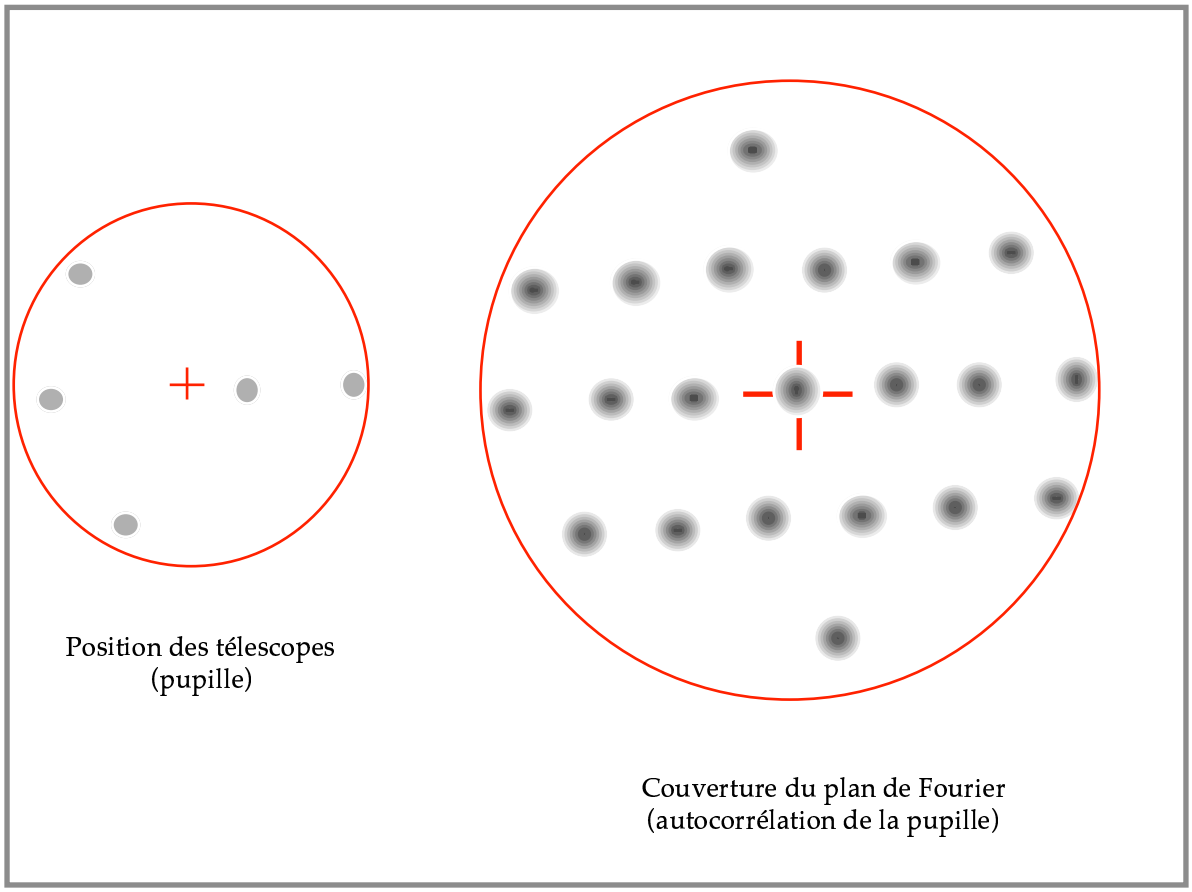
mais à la différence de la fonction de transfert d'une ouverture pleine, $\widehat{\mathcal{H}}(u)$ est nulle en beaucoup d'endroits du plan des fréquences, voyez l'exemple ci dessous avec 5 télescopes. Les zones où la TF de l'objet est mesurable dans le plan de Fourier sont les parties non nulles de $\widehat{\mathcal{H}}(u)$, soit l'intérieur des disques grisés dans la figure ci-dessous. On voit ici que la couverture du plan de Fourier est relativement bien répartie. L'emplacement de chaque télescope du réseau a été optimisé dans ce but, et l'opération n'est pas simple: cela revient au problème "inverse" de trouver une fonction (ici la transmission de l'ouverture globale) à partir de son autocorrélation (ici la fonction de transfert désirée).

La dégradation que fait subir un interféromètre aux images est différente de celle causée par l'atmosphère. Il fait reconstituer O(x) à partir d'une connaissance fragmentaire de sa transformée de Fourier $\hat{O}(u)$, qui n'est connue que dans les seules zones où $\widehat{\mathcal{H}}(u)$ n'est pas nulle.

On arrive à interpoler $\widehat{\mathcal{H}}(u)$ par des techniques plus ou moins explicites (Clean, Wipe, minimum d'entropie) et à "synthétiser" une ouverture pleine, celle correspondant dans la figure page suivante au cercle entourant l'ensemble des télescopes. Une limitation s'impose toutefois, du fait du nombre limité de points échantillonnés sur $\widehat{\mathcal{H}}(u)$: avec N ouvertures, on a N.(N-1) zones non nulles dans le plan de Fourier donnant (hors les symétries) N.(N-1)/2 mesures du module de la TF de l'objet, en ajoutant les clôtures de phases : (N-1)(N-2)/2 mesures supplémentaires, on a au total:

$N.(N-1)/2 + (N-1)(N-2)/2 \quad = \quad (N-1)^2$ paramètres indépendants mesurables sur $\widehat{O}(u)$.

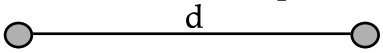
Si à partir de là on cherche à reconstruire un image O(x) trop "fine", soit contenant un nombre de pixels supérieur au nombre de paramètres libres, l'image reconstruite numériquement sera "instable", d'est à dire que la moindre erreur dans les données $\hat{I}(u)$ causera des variations aléatoires très grandes de l'image reconstruite O(x). Le nombre de pixels de l'image finale doit être grosso modo égal au nombre de paramètres mesurés par l'interféromètre. Par exemple avec 10 télescopes on a 81 mesures (bases plus clôtures) et il ne faut pas chercher à reconstruire une image plus grande que 9 par 9, sauf si l'on n'a des informations par ailleurs sur la forme de l'objet.



La taille angulaire d'un pixel de l'image reconstruite (la résolution) étant imposée par la base la plus grande, c'est le champ angulaire total qui est limité par le nombre d'ouvertures. Si l'objet observé est plus grand que ce champ, on ne pourra pas reconstruire son image sauf dans quelques cas particuliers.

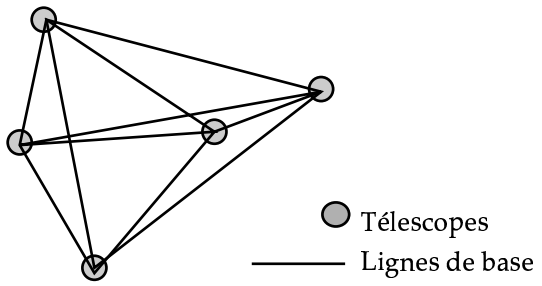
Problème 7.4 :

1) On dispose d'un interféromètre à deux télescopes :



Si les télescopes sont de diamètre très petit comparé à la distance d qui les sépare on les considère comme ponctuels. Combien y a-t-il alors de points non nuls dans la fonction de transfert de cet interféromètre ? Faire un schéma. Parmi ces points non nuls, combien transmettent de l'information à haute résolution angulaire ? Combien en reste-t-il dans un demi-plan ?

2) On dispose maintenant de plusieurs télescopes. Pour faire un interféromètre on relie optiquement chacun d'eux à l'ensemble des autres, comme dans la schéma dessous (ce n'est pas un dessin 3D, les télescopes sont dans le même plan).



Combien au maximum peut-on faire de lignes de bases si l'on dispose de N télescopes pour une configuration donnée ?

On considère les télescopes individuels comme ponctuels. Combien y a-t-il de points non nuls (hors fréquence zéro) dans un demi-plan de la fonction de transfert ? En déduire combien de paramètres libres on peut mesurer sur le module de la TF d'un objet observé avec l'interféromètre.

3) Pour un interféromètre à N télescopes ponctuels et fixes, le nombre de paramètres mesurables sur la phase de la TF d'un objet observé est (N-1)(N-2)/2. Quel est le nombre total de paramètres indépendants mesurables (phase et module) ? En déduire le nombre maximum de paramètres libres dans l'image reconstruite.

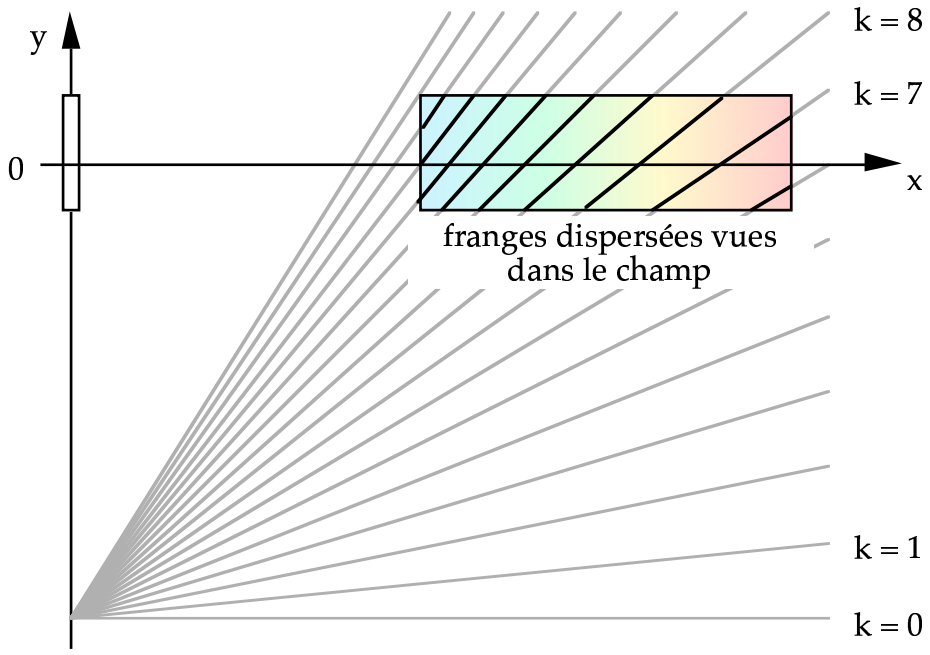
4) La base la plus longue de l'interféromètre a 200 m et on utilise une longueur d'onde $\lambda = 0.5\ \mu m$. Quelle est la résolution angulaire ?

5) Si l'on considère que la taille d'un élément (séparation entre deux points) de l'image reconstruite correspond à résolution de l'interféromètre, quel sera le champ correspondant sur le ciel ? Donner une valeur pour 5 télescopes.

7.5 Contraintes sur la mise en oeuvre des interféromètres

Différence de marche optique

La longueur de cohérence spectrale est un paramètre important en interférométrie. On ne ne peut faire de mesures que si la condition de cohérence spectrale est satisfaite: la différence de marche optique entre les faisceaux passant par les différents télescopes doit être inférieure à $\mathbf{L_c}$. Une large bande passante spectrale donnant une longueur de cohérence de 1µm impose des contraintes quasi impossibles à satisfaire sur le positionnement des différents télescopes. Pour augmenter $\mathbf{L_c}$ on peut réduire la bande passante $\Delta\lambda$ mais alors on limite la luminosité. Pour accroître $\mathbf{L_c}$ sans pour autant réduire $\Delta\lambda$, Michelson trouva un procédé : disperser l'image des franges, ce qui consiste à observer simultanément dans plusieurs bandes passantes étroites adjacentes. Les franges ont alors l'aspect de la figure ci-dessous.



superposition des images

Le pointage des différents télescopes du réseau doit être le même avec comme tolérance la tache d'Airy ou la tache d'aberration de chaque ouverture indépendante.

Détection des franges d'interférence

Une absence de franges => on ne peut rien déduire. La mesure des visibilités est rendue difficile par la turbulence atmosphérique.

7.4 Domaines d'application de la synthèse d'ouverture

Astrophysique
Radars, télédétection

8. Autres méthodes de Haute résolution angulaire
GHOST
HST
GAIA

Lectures conseillées et ouvrages dont je me suis servi (entre autres) pour faire ce poly :

- "Statistical optics" auteur : Joseph W. Goodman ; Editeur : Wiley Interscience.
- "Optique géométrique et ondulatoire" auteur : José-Philippe Perez, Ed. Masson.
- pour l'optique adaptive : "Improving the resolution of ground-based telescopes", article de 69 pages dans Review of Modern Physics, avril 1997, vol 69 n°2 p.437 à 505. Auteurs : Roggeman, Welsh, Fugate.