UM3 Optique de Fourrier, examens et corrigés

examen du samedi 20 mars 1993

Interférométrie des tavelures :

I . Donner la relation que permet de retrouver l'objet à partir de l'intégration "speckle".

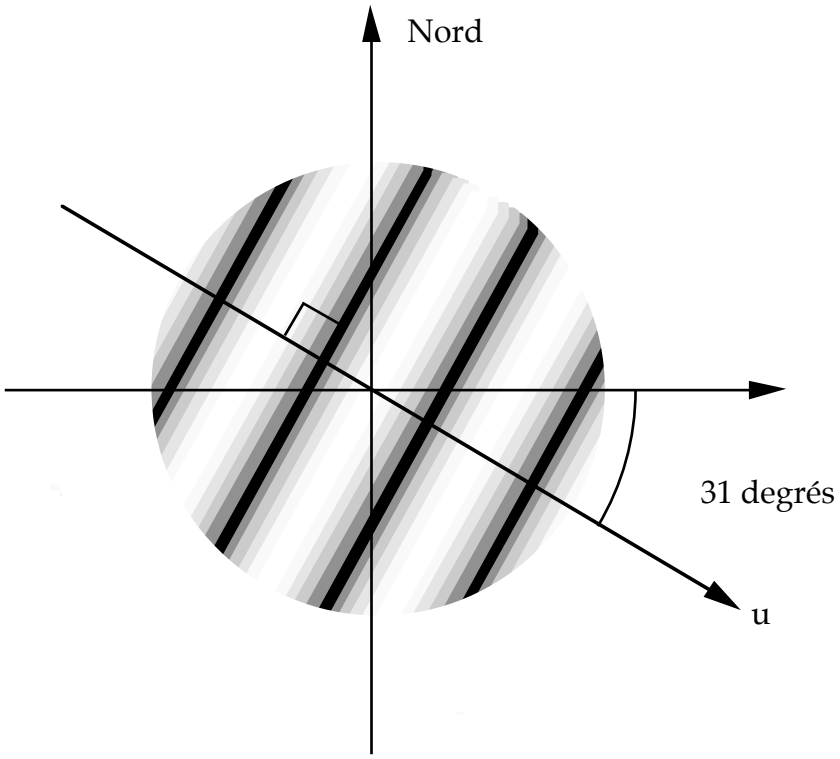
II . La figure suivante montre le résultat de l'intégration des modules carrés des TF de 1000 poses courtes sur un objet stellaire particulier, après normalisation par l'observation d'une source ponctuelle. Mesuré selon la direction indiquée par l'axe u dans la figure, le profil d'intensité dans ce module carré de TF moyenné est représenté par :

$<| |^2> / <| |^2> = 1 + \cos(2\pi a u)$

$a = 2.424 \ 10^{-7}$ radians.

II.1 Exprimer à partir de l'expression ci-dessus l'autocorrelation de O(x).

II.2 Quel est le type d'objet observé ? Quels paramètres peut-on déduire de la figure, et de la valeur de a? Faire un schéma de l'objet.



Corrigé mars 1993 :

I. Relation "speckle" : (1 point)

$| |^2 = <| |^2> / <| |^2>$

II.1 (2 points)

L'autocorrelation de O(x) s'obtient par TF inverse de $| |^2$

Autocorrelation de O(x) $= \int [1+\cos(2\pi au)] \exp(2i\pi ux)\, dx$

$= \int \exp(2i\pi ux)\, dx + 1/2 \int \exp[2i\pi u(x+a)]\, dx + 1/2 \int \exp[2i\pi u(x-a)]\, dx$

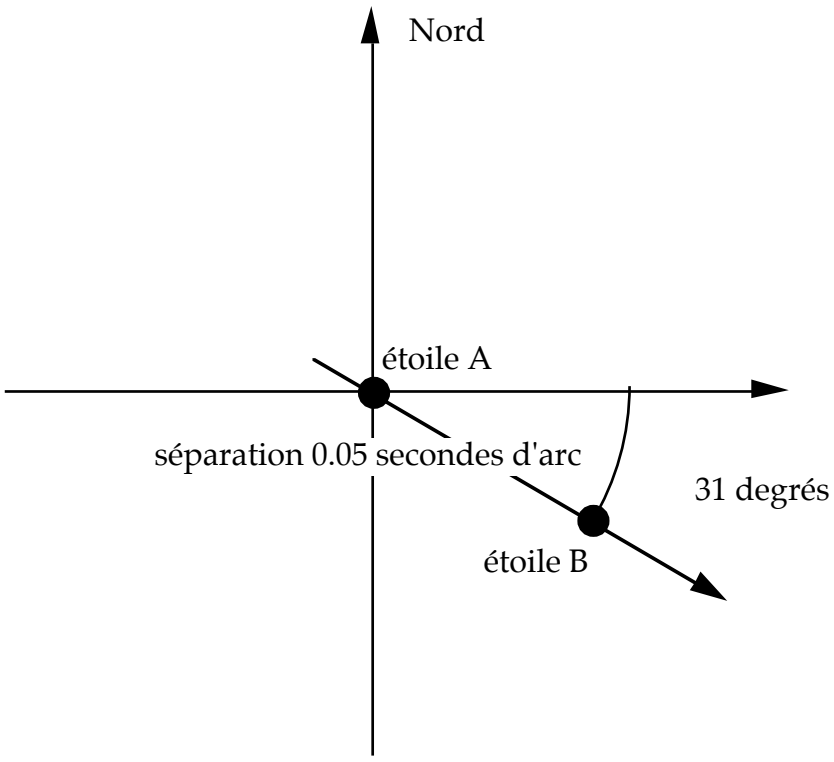
$= \delta(x) + 1/2\, \delta(x+a) + 1/2\, \delta(x-a)$

II.2 (2 points)

L'objet observé est une étoile double. Les deux composantes sont de brillance égale.

la valeur de a donne la séparation des composantes selon la direction définie par l'axe u dans la figure : $2.424\ 10^{-7}$ radians, soit 0.05 secondes d'arc.

l'angle d'orientation du segment joignant les composantes vaut 31 degrés (compté depuis la direction Est-Ouest).



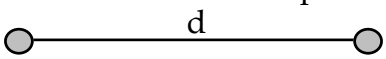
Haute résolution angulaire, Maîtrise SU3

examen juin 1994

1. Synthèse d'ouverture

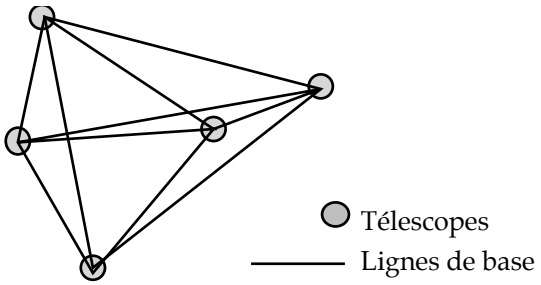
1a) Montrer que la TF est Hermitienne. En déduire que les deux moitiés (demi-plans) d'une fonction de transfert transmettent la même information.

1b) On dispose d'un interféromètre à deux télescopes :



Si les télescopes sont de diamètre très petit comparé à la distance d qui les sépare on les considère comme ponctuels. Combien y a-t-il alors de points non nuls dans la fonction de transfert de cet interféromètre ? Faire un schéma. Parmi ces points non nuls, combien transmettent de l'information à haute résolution angulaire ? Combien en reste-t-il dans un demi-plan ?

1c) On dispose maintenant de plusieurs télescopes. Pour faire un interféromètre on relie optiquement chacun d'eux à l'ensemble des autres, comme dans la schéma ci-contre.



Combien au maximum peut-on faire de lignes de bases si l'on dispose de N télescopes pour une configuration donnée ?

On considère les télescopes individuels comme ponctuels. Combien y a-t-il de points non nuls (hors fréquence zéro) dans un demi-plan de la fonction de transfert ? En déduire combien de paramètres libres on peut mesurer sur le module de la TF d'un objet observé avec l'interféromètre.

1d) Pour un interféromètre à N télescopes ponctuels et fixes, le nombre de paramètres mesurables sur la phase de la TF d'un objet observé est (N-1)(N-2)/2. Quel est le nombre total de paramètres indépendants mesurables (phase et module) ? En déduire le nombre maximum de paramètres libres dans l'image reconstruite.

1e) La base la plus longue de l'interféromètre a 200 m et on utilise une longueur

d'onde $\lambda = 0.5\ \mu$m. Quelle est la résolution angulaire ?

1f) Si l'on considère que la taille d'un élément (séparation entre deux points) de l'image reconstruite correspond à résolution de l'interféromètre, quel sera le champ correspondant sur le ciel ? Donner une valeur pour 5 télescopes.

2. Bispectre.

2a) Donner la définition du bispectre d'une fonction I(x) ayant pour TF la fonction (u).

2b) Le bispectre (3) (u, v) permet-il de retrouver le module carré de (u) ?

3. Optique adaptative.

Donner le rapport des flux limites (sensibilité) permettant de reconstruire le front d'onde entre le visible ($\lambda = 0.5\ \mu$m) et l'infra-rouge ($\lambda = 2.2\ \mu$m), sachant que r_0 , et τ_0 sont proportionnels à $\lambda^{6/5}$.

Quel est des deux le domaine de longueur d'onde le plus favorable ?

Corrigé juin 1994 :

1a) $\int I(x)\ \exp(-2i\pi ux)\ dx = \ (u)$

I(x) réel $\Rightarrow$ (-u) = * (u)

1b) 3 points non nuls, 2 à fréquence non nulle, 1 par demi plan.

1c) N (N-1)/2 bases, même nb de points non nuls dans le demi plan.

1d) N (N-1)/2 + (N-1)(N-2)/2 = (N-1) 2

Même nb de paramètres libres dans l'image.

1e) 5 10 - 7 / 200 = 2.5 10 - 9 radians = 5 10 - 4 "

1f) champ de côté (N-1) * 5 10 - 4 "
Pour N = 5 , champ = 2 m" x 2 m"

2a) (3) (u, v) ≡ (u) . (v) . (-u-v)

2b) (3) (u, 0) = (u) . (0) . (-u)

Comme I(x) est réel (-u) = *(u) et l'on a :

(3) (u, 0) = | (u) | 2 . (0) (0) correspond à l'intégrale de I(x) sur tout le champ.

On peut donc avoir facilement le module carré du spectre à partir du bispectre.

3) Le nombre N de photons détectés par aire de rayon r_o est donné par :

$N = a\, r_o^2\ \tau_o$

$N_{IR} / N_{vis} = r_{o\text{-}IR}^2\ \tau_{o\text{-}IR}\ r_{o\text{-}vis}^{-2}\ \tau_{o\text{-}vis}^{-1}$

sachant que r_o , et τ_o sont proportionnels à $\lambda^{6/5}$ on a :

$N_{IR} / N_{vis} = (\lambda_{IR} / \lambda_{vis})^{18/5}$

$= 4.4^{18/5} = 207$

On peut donc guider sur des flux 207 fois plus faibles en I.R. qu'en visible.

Haute résolution angulaire, Maîtrise SU3
Partiel, février 1995

I Longueur de cohérence

a) On donne une source lumineuse de longueur d'onde $\lambda = 0.6563\ \mu$m et de largeur $\Delta\lambda = 50$ nm. Quelle est sa longueur de cohérence ?

b) On prend un émetteur de radio de musique rock FM émet avec une largeur de bande de 0.05 MHz. Quelle est sa longueur de cohérence ? On considérera que l'on intègre le signal sur un temps long devant la période des motes de musique.

II Contraste de phase

a) Rappelez brièvement le principe de la méthode de Zernike, faites un schéma.

b) Soit un objet de phase $\Psi(\mathbf{X}s) = A \exp [\, i\, \varphi(\mathbf{X}s)\,]$
avec A constant et des variations de phase très faibles :
$\varphi(\mathbf{X}s) \in [\pi/100, -\pi/100] \quad \forall\ (\mathbf{X}s) \in$ au champ source.

En faisant l'approximation des petits angles, trouvez ce que sera la variation relative de l'intensité dans le plan image.
c) Y a-t-il un moyen d'améliorer ce contraste ? Lequel ? Donnez un coefficient d'absorption limite.

III Interférométrie des tavelures

a) Donner l'expression de l'autocorrélation d'une étoile double dont les composantes sont d'intensité A et B.
b) Après observation en mode tavelures d'une étoile double on obtient son autocorrélation. Celle-ci est de la forme :
$5\delta(x) + 2\,\delta(x + 5) + 2\,\delta(x - 5)$
En exprimant x en mm. Quelle est la séparation des images des étoiles ?
c) Quelle sont les brillances des deux étoiles ?

Corrigé Février 1995

I a) $L_c = \lambda 2/\ \Delta\lambda = 0.65632\ /\ 0{,}05 = 8{,}61\ \mu$m

I b) $L_c = \lambda 2/\ \Delta\lambda = c\ /\ \Delta\nu = 6$ km

II a) voir poly

II b) $I = \Psi\Psi^* \approx A2\ (1+2\varphi)$

$\Delta I\ /\ I = 4\pi\ /\ 100 \approx 0{,}12$

II c) On rend la lame de phase absorbante. Il ne faut pas dépasser $\Delta I\ /\ I = 1$, soit un coef d'absorption max de $1\ /\ 0.12 \approx 8$.

III a) $(A2 + B2)\ \delta(x) + AB\ \delta(x - a) + AB\ \delta(x + a)$

III b) Séparation 5 mm.

III c) On a un système de deux équations à deux inconnues

$A2 + B2 = X$

$AB = Y$

Les solutions sont :

$A = (X+(X2 - Y2\ )1/2\ /2\ )1/2$

$B = (X - (X2 - Y2\ )1/2\ /2\ )1/2$

$X = 5$ et $Y = 2 \Rightarrow$ $A = 2$ et $B = 1$ ou bien $A = 1$ et $B = 2$. Il y a deux solutions symétriques.

Maîtrise SU3, session de septembre 1995
Haute résolution angulaire

I. Cohérence spatiale

Sur un montage de franges d'Young, vous disposez une source lumineuse de 0.25 mm de côté, à 1 m devant un écran à deux trous. Cette source émet une lumière monochromatique à $\lambda = 0.5\ \mu$m.

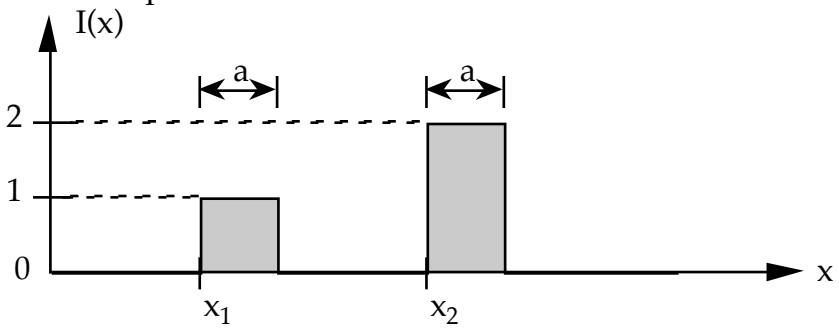
a) Les trous sont au départ très proches l'un de l'autre. Que se passe-t-il quand on augmente leur séparation ?

b) Pour quelle séparation a-t-on le premier zéro de visibilité (contraste) des franges ? On suppose que le problème est à une dimension.

c) Donner l'expression de la visibilité des franges en fonction de la séparation des trous.

II. Interférométrie

Le schéma ci-dessous représente l'intensité d'une source lumineuse constituée de deux composantes.



a) Donnez une expression de l'intensité I(x) illustrée par la figure en utilisant la fonction rectangle rect (x) définie par :

rect (x) = 1 si x est dans l'intervalle [0 ,1]

rect (x) = 0 ailleurs.

b) Quelle est la fonction d'autocorrelation de I(x) ? Représentez-la graphiquement.

c) Préciser la hauteur des pics dans cette autocorrelation.

III. Optique adaptative et Isoplanétisme

Une couche turbulente se situe à 10 km au dessus d'un télescope. Elle donne un rayon de cohérence (r_o) égal à 0.1 m. L'image donnée par ce télescope est corrigée grâce à l'optique adaptative. On se sert d'une étoile ponctuelle comme source de référence.

a) sur quel angle autour de l'étoile de référence la correction reste-t-elle valable ? (donner l'angle d'isoplanétisme ρ_i)

b) La couche turbulente se déplace, entraînée par un vent à 10 m/s. Quel est le temps de cohérence correspondant ?

c) On s'intéresse à deux objets : l'un à situé à 1″ d'arc de l'étoile de référence, l'autre à 10″ de celle-ci. Représenter schématiquement les fonctions de transfert pour chacun des deux objets.

d) Même question si la couche turbulente est à 1 km au dessus du télescope.

e) Jusqu'où serait valable la correction si la zone turbulente était localisée à proximité immédiate du miroir (dans le plan pupille) ?

Corrigé, septembre 1995

I. Cohérence spatiale.
a) le contraste des franges diminue.
b) Le premier zéro de visibilité est atteint pour une séparation correspondant à la largeur de cohérence : $\lambda = 0.5\mu m$; $l = 0.25$ mm ; $d = 1$ m ;
$a = \lambda / \theta = \lambda ł d = 0.5\ 10\text{-}6\ /\ 0.25\ 10\text{-}3 = 2\ 10\text{-}3$ m.
c) Pour une séparation x des fentes, $V(x) = \text{sinc}\ (\pi\ x\ d\ /\lambda\ l)$.

II. Interférométrie.
a) $I(x) = \text{rect}\ [\ (x - x_1)/a\ ] + 2\ \text{rect}\ [\ (x - x_2)/a\ ]$.
b) Fonction d'autocorrélation de rect(x) : $AC_{rect}\ (b) = \int \text{rect}\ (x)\ \text{rect}\ (x - b)\ dx$
$b \ni [0, 1] \Rightarrow \text{rect}(x)\ \text{rect}(x - b) = 1$ si $x \ni [b, 1] \Rightarrow AC_{rect}\ (b) = \int_b^a dx = a - b = a - |b|$
$b \ni [-1, 0] \Rightarrow \text{rect}(x)\ \text{rect}(x - b) = 1$ si $x \ni [0, 1 - |b|] \Rightarrow AC_{rect}\ (b) = \int_0^{a-|b|} dx = a - |b|$
$AC_{rect}\ (b) = a - |b|$ si $|b| < a$ et 0 ailleurs.
$AC\ I\ (b) = \int I(x)\ I(x - b)\ dx$
$= 2 \int \text{rect}\ (x - x_1)/a\ \text{rect}\ (x - x_2 - b)/a\ dx + 2 \int \text{rect}\ (x - x_2)/a\ \text{rect}\ (x - x_1 - b)/a\ dx$
$+ \int \text{rect}\ (x - x_1)/a\ \text{rect}\ (x - x_1 - b)/a\ dx + 4 \int \text{rect}\ (x - x_2)/a\ \text{rect}\ (x - x_2 - b)/a\ dx$
Pour les deux premières sommes on fait respectivement les changements de variable $X \equiv x - x_1$ et $X' \equiv x - x_2 \Rightarrow x = X + x_1$ et $x = X' + x_2$
$AC\ I\ (b) =$
$= 2 \int \text{rect}\ X/a\ \text{rect}\ (X + x_1 - x_2 - b)/a\ dX + 2 \int \text{rect}\ X'/a\ \text{rect}\ (X' + x_2 - x_1 - b)/a\ dX'$
$+ \int \text{rect}\ X/a\ \text{rect}\ (X - b)/a\ dX + 4 \int \text{rect}\ X'/a\ \text{rect}\ (X' - b)/a\ dX'$
$= 2\ AC_{rect}\ [\ (b + x_2 - x_1)/a] + 2\ AC_{rect}\ [\ (b + x_1 - x_2)/a]$
$+ AC_{rect}\ (b/a) + 4\ AC_{rect}\ (b/a)$
$AC\ I\ (b) = 2\ AC_{rect}\ [\ (b + x_2 - x_1)/a] + 2\ AC_{rect}\ [\ (b + x_1 - x_2)/a] + 5\ AC_{rect}\ (b/a)$
c) La hauteur des pics est 2, 5, et 2 .

III. Optique adaptative et Isoplanétisme
a) Rayon d'isoplanétisme : $\rho_i = r_o/h = 0{,}1\ /\ 10\ 4 = 10\text{-}5 = 2$ " d'arc.

b) Temps de cohérence : $\tau_o = r_o / v = 0.1 / 10 = 0.01$ s.
c) L'objet à 1" est corrigé à peu près : fonction de transfert sans aberration. l'objet à 10 " ne l'est pas : fonction de transfert speckle ou avec aberration selon pose.
d) Si la couche est à 1 km $\rho_i =$ 20 " d'arc. Les deux objets sont corrigés.
e) Si la couche est au contact du miroir, $\rho_i = \pi$: la correction est valable partout.

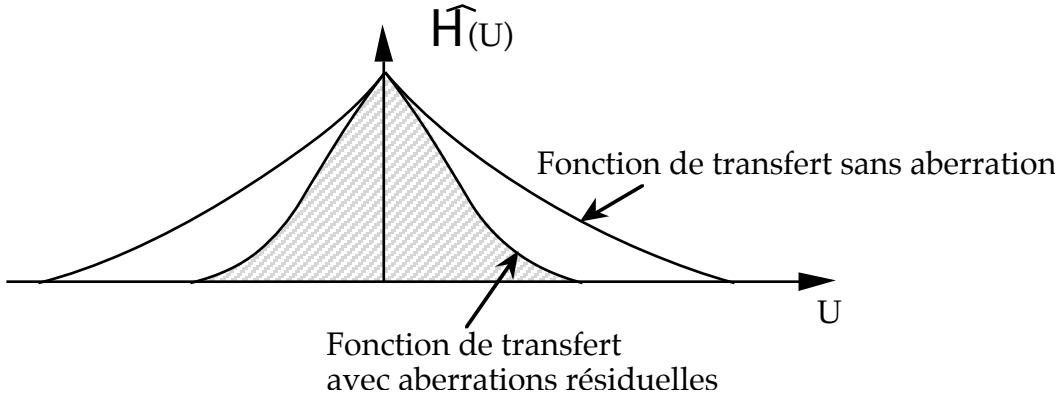
Maîtrise SU3, session de septembre 1996
Haute résolution angulaire

I Optique adaptative

On considère un télescope de diamètre D = 10 m est placé au sol dans des conditions atmosphériques où r_0 = 0,2 m.

1) Une couche d'air turbulent au dessus du télescope est entraînée par un vent de 20 ms- 1. Quel est le temps de réponse minimal qu'un système d'optique adaptative doit avoir pour que la correction soit satisfaisante ?

2) Le système ne corrige pas parfaitement l'onde, on a des aberrations résiduelles qui donnent la fonction de transfert suivante :



L'intégrale de la fonction de transfert avec aberrations résiduelles (partie hachurée) correspond à 50 % de l'intégrale sous la courbe sans aberrations.
a) Quel est le rapport de Streilh ?
b) Quelle est la baisse relative d'intensité au centre de l'image d'une source ponctuelle, comparé avec une optique parfaite ? Expliquez votre réponse.

3) Quel serait le rapport de Streilh pour r_0 = 0,2 m si l'on ne mettait aucune correction ?

4) Vous disposez d'un système d'optique adaptative comprenant seulement 500 actuateurs. Jusqu'à quelle longueur d'onde peut-il fonctionner en donnant une correction satisfaisante ? Rappel : r_0 est proportionnel à λ 6 / 5 .

6) Même question si le télescope fait seulement 2 mètres de diamètre.

Corrigé, septembre 1996

1) rapport de Streilh = rapport des brillances = 0.5

$$S = \frac{\int \widehat{H}_a(U)\,dU}{\int \widehat{H}(U)\,dU} \qquad S = \frac{H_a(0)}{H(0)}$$

2) $S \approx (r_0/D)\,2 = 4 * 10\text{-}4$

3) $N \approx (D/r_0)\,2 \Rightarrow r_0(\lambda) = D * N - 1/2 = 10/22 \approx 0.5$ m

4) $r_0(\lambda) = r_0(\lambda_0)\,(\lambda/\lambda_0)\,6/5 \quad \Rightarrow \lambda = \lambda_0\,(r_0(\lambda)/\,r_0(\lambda_0))\,5/6$

$\Rightarrow \lambda = \lambda_0\,(D * N - 1/2\,/\,r_0(\lambda_0))\,5/6 = \lambda_0\,D\,5/6\,N - 5/12\,r_0(\lambda_0)$
$- 5/6$
$\lambda = 1.0\ \mu$m

5) $\lambda = 0.26\ \mu$m

Maîtrise SU3, session de juin 1997
Haute résolution angulaire

Question de cours
En quoi consiste la méthode des tavelures sans récupération de la phase? Faites un schéma des fonctions de transfert associées.

I. Optique adaptative
Un système d'optique adaptative dispose d'un miroir souple avec 100 actionneurs piézo-électriques. Le télescope qu'il équipe fait 2 m de diamètre.
1) Quel est la valeur minimale du rayon de cohérence r_0 à partir de laquelle le système pourra corriger la turbulence de manière satisfaisante ?
2) On suppose que la turbulence est localisée à 2 km au dessus du télescope. Donner l'expression du champ d'isoplanétisme puis sa valeur en secondes d'arc.
3) en fait, $r_0 = 0.1$ m pour le visible ($\lambda = 0.5\ \mu$m). A partir de quelle longueur d'onde le système fonctionnera-t-il correctement ?

II. Observation avec un interféromètre à deux télescopes
1) On considère une étoile double comme un ensemble de deux sources ponctuelles de brillance égale normalisée à 0.5 chacune, vues dans des directions $-\alpha_0/2$ et $+\alpha_0/2$, où α_0 est un angle très petit. Donnez l'expression de la fonction objet $O(\alpha)$. Raisonnez à une dimension.

2) Calculez la TF de $O(\alpha)$, soit $\hat{O}(u)$.

3) On observe $O(\alpha)$ avec un interféromètre à deux télescopes. Sa base est d'orientation fixe, parallèle à l'orientation de l'étoile double, et l'on peut faire varier la longueur B de la base. Le diamètre des télescopes est négligeable par rapport à B dans tous les cas.
Donnez l'expression de la fonction de transfert normalisée **H**(u) de l'interféromètre en fonction de B et faites un schéma.

4) On mesure l'intensité dans le plan image de l'interféromètre. Donner l'expression de la TF normalisée de l'image $\hat{I}(u)/\hat{I}(0)$. Quel est l'effet de l'interféromètre sur $\hat{O}(u)$?

5) Lorsqu'on règle la base à **5 m**, la visibilité des franges d'interférence est minimale: $(I_{max}-I_{min})/(I_{max}+I_{min}) = 0$.

Lorsqu'on accroît la base, la visibilité augmente, jusqu'à une base de **10 m** où elle passe par un maximum : $(I_{max}-I_{min})/(I_{max}+I_{min}) = 1$.

Lorsqu'on accroît encore la base, la visibilité des franges baisse à nouveau et atteint un minimum pour une base de **15 m**.

Expliquez pourquoi l'on observe ces variations de visibilité et donner la séparation angulaire α_0 des deux composantes de l'étoile double, sachant que La longueur d'onde utilisée est $\lambda = 0.5\ \mu m$ pour toutes les bases.

6) Les composantes de l'étoile double tournent sur leur orbite. Lors d'une observation ultérieure. Les visibilités observées sont alors égales à 1 quelle que soit la longueur de base. De quel angle a changé l'orientation de l'étoile double par rapport à la situation de la question 5) ?

Corrigé, juin 1997 :

I. Optique adaptative

1) Il faut au moins un actionneur par r_0 , soit un nombre N d'actionneurs
$N = (D/r_0)\ 2 \quad => \quad r_0 = D\ N\text{-}\ 1/2 \quad => \quad r_0 = 0.2$ m
2) $\theta = r_0 / h = 10\text{-}\ 4$ radians = 20 secondes d'arc
3) $r_0(\lambda_2) / r_0(\lambda_4) = (\lambda_2 / \lambda_4)6/5 \quad => \quad \lambda_2 = \lambda_1 (0.2 / 0.1)5/6 \quad => \quad \lambda_2 = 0.5 * 2.3 = 1.15$ μm

II. Observation avec un interféromètre à deux télescopes

1) $O(\alpha) = 0.5\ \delta(\alpha - \alpha_0/2) + 0.5\ \delta(\alpha + \alpha_0/2)$;
2) $\hat{O}(u) = 0.5 \exp(2i\pi\ u\ \alpha_0/2) + 0.5 \exp(-2i\pi\ u\ \alpha_0/2) = \cos(\pi\ u\ \alpha_0)$
3) $\mathbf{H}(u) = \delta(u) + 0.5\ \delta(u - B/\lambda) + 0.5\ \delta(u + B/\lambda)$
4) $\hat{I}(u) = \hat{O}(u)\ .\ \mathbf{H}(u) = \cos(\pi\ u\ \alpha_0)\ .\ [\ \delta(u) + 0.5\ \delta(u - B/\lambda) + 0.5\ \delta(u + B/\lambda)\ ]$
$= \delta(u) + 0.5 \cos(\pi\ \alpha_0\ B/\lambda)\ \delta(u - B/\lambda) + 0.5 \cos(\pi\ \alpha_0\ B/\lambda)\ \delta(u + B/\lambda)$
L'effet de l'interféromètre est d'échantillonner $\hat{O}(u)$ aux valeurs
$u = +B/\lambda$ et $u = -B/\lambda$.

5) La visibilité des franges correspond à $\cos(\pi\ \alpha_0\ B/\lambda)$
$\cos(\pi\ \alpha_0\ B/\lambda) = 0 \Rightarrow \pi\ \alpha_0\ B/\lambda = k\pi + \pi/2$, où k est un entier
$\cos(\pi\ \alpha_0\ B/\lambda) = 1 \Rightarrow \pi\ \alpha_0\ B/\lambda = k'\ \pi$

La seule solution compatible avec les observations est
- pour B = 5 m : $\pi\ \alpha_0\ B_{5m} / \lambda = \pi/2$
- pour B = 10 m : $\pi\ \alpha_0\ B_{10m} / \lambda = \pi$
- pour B = 15 m : $\pi\ \alpha_0\ B_{15m} / \lambda = 3\pi/2$

$\Rightarrow \alpha_0 = \lambda / B_{10m} = 0.5\ 10\text{-}\ 7$ radians = 10- 2 secondes d'arc

6) Les étoiles ont tourné de 90 ° et leur séparation projetée sur la ligne de base est devenue nulle. L'interféromètre les voit comme une source ponctuelle unique.

Maîtrise SU3, session de juin 1998
Haute résolution angulaire

Question de cours

Optique adaptative

Décrivez le senseur de front d'onde par courbure. Faites un schéma détaillé.

Problèmes

I. Bispectre.

Soit un objet défini par :

$$O(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \alpha\, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{b}) .$$

x, **a** et **b** sont des vecteurs à deux dimensions.

1) De quel type d'objet pourrait-il s'agir ? faites un schéma.

2) Exprimez sa TF $\hat{O}(\mathbf{u})$.

3) Exprimez son bispectre $\hat{O}^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})$.

4) A partir d'un bispectre, peut-on remonter à la position de l'objet correspondant dans le champ ?

5) On vous donne un bispectre décrit par :

$$\begin{aligned} Bsp^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 9/8 & \\ & + (1/2) \exp[+2i\pi\, \mathbf{ud}] + (1/4) \exp[-2i\pi\, \mathbf{ud}] \\ & + (1/2) \exp[+2i\pi\, \mathbf{vd}] + (1/4) \exp[-2i\pi\, \mathbf{vd}] \\ & + (1/2) \exp[+2i\pi\, (-\mathbf{u}-\mathbf{v})\mathbf{d}] + (1/4) \exp[-2i\pi\, (-\mathbf{u}-\mathbf{v})\mathbf{d}] \end{aligned}$$

où le vecteur **d** est de coordonnées (-1,4), quel est l'objet ?

II. Optique adaptative.

On observe une source ponctuelle à l'infini à travers un milieu turbulent à une longueur d'onde de 1 μm.

1) Dans quel domaine de radiations est-on ?

2) la réponse impulsionnelle a un rayon de 0,1 mm au foyer de l'instrument d'une focale de 10 m. Combien approximativement vaut r_0 ?

3) On met en marche un système d'optique adaptative et la réponse impulsionnelle devient plus fine : son rayon passe à 0,01 mm. Quel est approximativement le diamètre de l'ouverture ?

4) Le rapport de Streilh donné par le système d'optique adaptative est de 0,4. De combien pourrait encore croître l'intensité lumineuse au centre de la tache image si l'on retirait toutes les aberrations ?

Corrigé, juin 1998

I. Bispectre.

1) deux sources ponctuelles déparées par une distance (**b**-**a**) et d'intensité respectives 1 et α.

2) et 3) voir feuille manuscrite

4) non, on n'a que son image, mais pas sa position.

5) $O(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \ (1/2)\ \delta(\mathbf{x} - \mathbf{b})$.

II. Optique adaptative.

1) infra-rouge proche

2) $\rho = \lambda f / r_0 \quad \Rightarrow \quad r_0 = \lambda f / \rho = 0{,}1$ m

3) D est de l'ordre de 1m

4) 2,5

Maîtrise PAEL5, session de septembre 1999
Haute résolution angulaire

Turbulence et triple corrélation

On observe un objet O($\mathbf{x_o}$) dont l'image faite par une optique parfaite sans diffraction aurait pour expression:

$$I0\ (\mathbf{x}) = A\ \delta\ (\mathbf{x} - \mathbf{x}_a) + B\ \delta\ (\mathbf{x} - \mathbf{x}_b)$$

la variable $\mathbf{x}$ est un vecteur à deux dimensions dans l'espace image.
$\mathbf{x}_a$ et $\mathbf{x}_b$ sont des veteurs constants.
A et B sont des scalaires constants.
δ ($\mathbf{x}$) désigne une distribution de Dirac.

1) a) Qquel objet astronomique O($\mathbf{x_o}$) peut-il être ?
b) Que représentent $\mathbf{x}_a$ et $\mathbf{x}_b$?
b) Que représentent A et B ?

2) On observe en réalité l'objet O($\mathbf{x_o}$) avec un télescope de diamètre 10 m et de focale résultante 500 m sans aberration, à une longueur d'onde moyenne $\lambda = 0.6\ \mu$m. On obtient une image I1 ($\mathbf{x}$).

a) On ote K1($\mathbf{x}$) la réponse impulsionelle. Quel est le rayon de la tache de diffraction ?

b) Exprimer de I1($\mathbf{x}$) à partir de K1($\mathbf{x}$).

c) Donnez une expression de l'intensité P1($\mathbf{x_p}$) dans le plan pupille du télescope. On notera par T1($\mathbf{x_p}$) la fonction de transfert du télescope sans aberration.

d) Peut-on avoir une bonne estimation de O($\mathbf{x_o}$) avec ce télescope?

e) représentez schématiquement l'image en choisissant des valeurs arbitraires toutes égales pour A, B et C. Les coordonnées des vecteurs sont $\mathbf{x}_a = (0, 2)$; $\mathbf{x}_b = (1,-1)$ valeurs en mm.

e) représentez schématiquement P1 ($\mathbf{x_p}$).

3) Le télescope est sous une couche turbulente donnant $r_0 = 0.1$ m. On notera par T2 ($\mathbf{x_p}$) la fonction de transfert du télescope avec aberration. On obtient une image I2($\mathbf{x}$).

a) On ote K2($\mathbf{x}$) la réponse impulsionelle. Quel est le rayon de la tache d'aberration ?

b) Donnez une nouvelle expression P2($\mathbf{x_p}$) de l'intensité dans le plan pupille du télescope.

c) représentez schématiquement P2($\mathbf{x_p}$).

d) Peut-on avoir une bonne estimation de O($\mathbf{x_o}$) avec cette valeur de r_0 ?

4) Pour tenter de récupérer l'information, on fait une triple corrélation de I2(**x**).

a) donner l'ecpression générale d'une triple corrélation.

b) Quelle est la relation avec un bispectre ?

5) On a pu mesurer $\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_a$ par autocorrélation. Par ailleurs, en calculant les valeurs moyennes sur plusieurs images turbulées de

$I2^{(3)}(\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_a, \mathbf{b}) = \int I2(\mathbf{x}) \,.\, I2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a + \mathbf{x}_b) \,.\, I2(\mathbf{x} - \mathbf{b})\, d\mathbf{x}$ on arrive à remonter à

$I1^{(3)}(\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_a, \mathbf{b}) = \int I1(\mathbf{x}) \,.\, I1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a + \mathbf{x}_b) \,.\, I1(\mathbf{x} - \mathbf{b})\, d\mathbf{x}$

b est un vecteur variable.

a) Que devient $I(\mathbf{x}) \,.\, I(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a + \mathbf{x}_b)$?

b) Que devient $I^{(3)}(\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_a, \mathbf{b})$?

Corrigé, septembre 1999 :

1) a) $O(\mathbf{x}_o)$ pest une étoile double

b) $\mathbf{x}_a$, $\mathbf{x}_b$ représentent les positions des étoiles dans l'image.

b) A, B représentent les intensités dans l'image.

2)

a) rayon de la tache de diffraction : 36 μm

b) $I1(\mathbf{x}) = I0(x) * K1(\mathbf{x})$.

c) $P1(\mathbf{x}_p) = T1(\mathbf{x}_p)\, [\, 1 + \cos(\, 2\pi\, (\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_a)\, \mathbf{x}_p \,/\, \lambda f\,)\,]$

d) Peut-on avoir une bonne estimation de $O(\mathbf{x}_o)$ avec ce télescope? oui car la fréquence de coupure de $T1(\mathbf{x}_p)$ est supérieure à la période du cos.

e) représentez schématiquement l'image en choisissant des valeurs arbitraires pour A et B.

f) représentez schématiquement $P1(\mathbf{x}_p)$.

3)

a) 3.6 mm

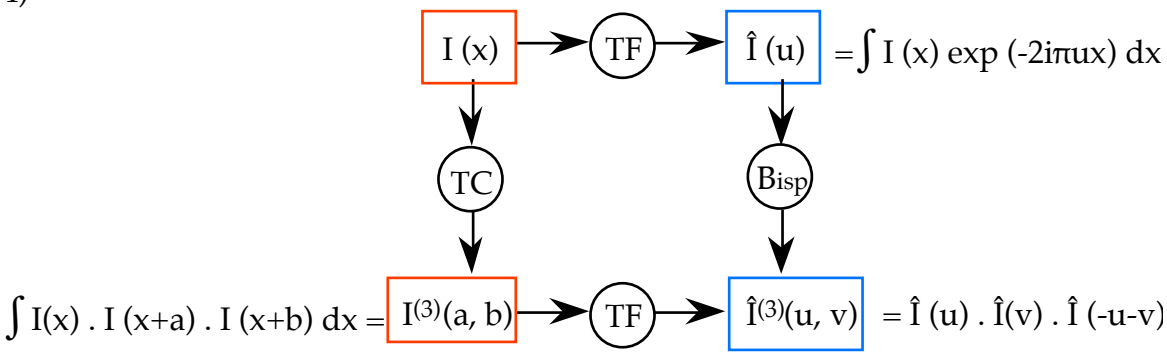
b) $P2(\mathbf{x}_p) = T2(\mathbf{x}_p)\, [\, 1 + \cos(\, 2\pi\, (\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_a)\, \mathbf{x}_p \,/\, \lambda f\,)\,]$

Comme $T2(\mathbf{x}_p)$ a maintenant un support plus petit que la période du cos on ne peut pas voir les modulations.

c) représentez schématiquement $P2(\mathbf{x}_p)$.

d) Peut-on avoir une bonne estimation de $O(\mathbf{x_o})$ avec cette valeur de r_0 ? non.

4)



5)

a) $I(\mathbf{x}) \,.\, I(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a + \mathbf{x}_b) = \delta(\mathbf{x})$

b) $I^{(3)}(\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_a, \mathbf{b}) = \int I(\mathbf{x})\, \delta(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = I(\mathbf{x})$

On a retrouvé l'image sans aberration.