

# Echelles de distances Physique des Galaxies Cosmologie

La présente version de ce poly date de 1999.  
Elle accompagne le cours de DEUG 2A fait de 1995 à 1999  
L.Koechlin

# Unités, Notations et Constantes

Les unités utilisées dans ce cours sont celles du S.I. : m , kg, s, et quand c'est nécessaire, d'autres unités spécifiques à l'astrophysique décrites plus loin.

Vitesse de la lumière	$c =$	299 792 458	$\text{m.s}^{-1}$	(valeur exacte par définition)
Constante de Planck	$h =$	$6.626176 \cdot 10^{-34}$	J.s	
Cste de la Gravitation	$G =$	$6.67 \cdot 10^{-11}$	$\text{m}^3.\text{kg}^{-1}.\text{s}^{-2}$	
Cste de Boltzmann	$k =$	$1.380662 \cdot 10^{-23}$	$\text{J.K}^{-1}$	
Cste de Hubble	$H_0 =$	70	$\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$	(valeur imprécise)
charge de l'électron	$-e =$	$-1.6021892 \cdot 10^{-19}$	C	
masse de l'électron	$m_e =$	$9.109534 \cdot 10^{-31}$	kg	
masse du proton	$m_p =$	$1.6727 \cdot 10^{-27}$	kg	
masse du soleil	$M_s =$	$1.989 \cdot 10^{30}$	kg	
rayon du soleil	$R_s =$	$6.96 \cdot 10^8$	m	
puissance du soleil	$P_s =$	$3.8 \cdot 10^{26}$	W (totale rayonnée)	
masse de la terre	$M_t =$	$5.976 \cdot 10^{24}$	kg	
1 Radian	$= 180/\pi$	degrés	$\approx 206\,265$	secondes d'arc

Unité Astronomique (UA) =  $1.496 \cdot 10^{11}$  m (rayon moyen de l'orbite terrestre)

Année lumière (al) =  $9.46 \cdot 10^{15}$  m

Parsec (pc) =  $206265$  UA =  $3.09 \cdot 10^{16}$  m = 3.16 al

## Alphabet Grec

alpha	A	$\alpha$
beta	B	$\beta$
gamma	$\Gamma$	$\gamma$
delta	$\Delta$	$\delta$
epsilon	E	$\epsilon$
zeta	Z	$\zeta$
eta	H	$\eta$
theta	$\Theta$	$\theta$
iota	I	$\iota$
kappa	K	$\kappa$
lambda	$\Lambda$	$\lambda$
mu	M	$\mu$
nu	N	$\nu$
xi	$\Xi$	$\xi$
omicron	O	$\omicron$
pi	$\Pi$	$\pi$
rho	P	$\rho$
sigma	$\Sigma$	$\sigma$
tau	T	$\tau$
upsilon	Y	$\upsilon$
phi	$\Phi$	$\phi$
khi	X	$\chi$
psi	$\Psi$	$\psi$
omega	$\Omega$	$\omega$

# 1. Échelles de distance

## 1.1 Unités de longueur

L'unité de longueur est le mètre, mais dans le cours on va aussi utiliser des unités plus grandes, mieux adaptées aux distances en jeu. D'abord le temps-lumière : il exprime une distance en temps que met la lumière pour la parcourir.

Exemples de distances en temps lumière :

Plus petite échelle connue	?
Rayon de l'atome d'hydrogène	$3 * 10^{-19}$ s
1 m	1 / 299 792 458 s
Diamètre de la terre	0.04 s
Distance Terre - Soleil	8 mn
Distance de $\alpha$ Centaure	4.3 ans
Diamètre de notre galaxie	82 000 ans
Distance d'une galaxie proche (M31)	$2.2 * 10^6$ ans
Distance d'un amas de galaxies (Coma)	$370 * 10^6$ ans
Distance d'un amas lointain	$2 * 10^9$ ans
Quasar lointain	8 à $10 * 10^9$ ans
Rayonnement cosmologique fossile	12 à $15 * 10^9$ ans

Autres unités de longueur :

En taille croissante des échelles, on utilise : m, UA, al, pc, Z. Ne cherchez pas à retenir les valeurs numériques par coeur mais sachez les recalculer si nécessaire.

Unité Astronomique (UA) =  $1.496 * 10^{11}$  m

C'est le rayon moyen de l'orbite terrestre soit 8 mn lumière environ.

Année lumière (al) =  $9.46 * 10^{15}$  m

Peu utilisée par les "pros", c'est pourtant une unité valable.

Parsec (pc) :

Distance à laquelle on voit le rayon de l'orbite terrestre sous un angle de une seconde d'arc. Comme 1 radian = 206 265 secondes d'arc, on a

$$1 \text{ pc} = 206265 \text{ UA} = 3.09 * 10^{16} \text{ m} = 3.16 \text{ al}$$

Z : Mesure de distance indirecte, non linéaire, correspondant au décalage spectral des sources lointaines : On observe une raie spectrale que l'on sait être à la longueur d'onde  $\lambda_0$  dans un référentiel au repos. On voit cette raie dans le spectre d'une source lointaine, mais à la longueur d'onde décalée  $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$ .

On calcule alors  $z = (\lambda / \lambda_0) - 1 = \Delta\lambda / \lambda_0$

De Z on peut déduire la vitesse V de la source, en supposant que le décalage est dû à l'effet Doppler. Pour les valeurs de z petites devant 1, on peut utiliser l'approximation  $V \approx z c$ .

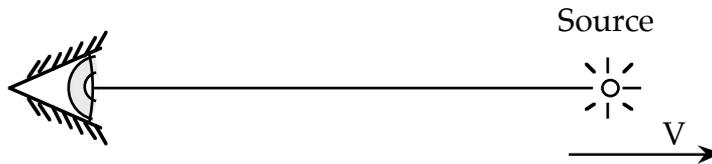
Pour les valeurs de z comparables ou supérieures à 1, V est relié à z par la formule de l'effet Doppler longitudinal relativiste :

$$v = \gamma (1 - \beta) v_0 \quad \text{avec} \quad \beta = V/c \quad ; \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$$

où  $\nu$  est la fréquence :  $\nu = c/\lambda$  ;  $\nu_0 = c/\lambda_0$

---

**exercice:** retrouver l'approximation  $V = zc$  pour  $z \ll 1$



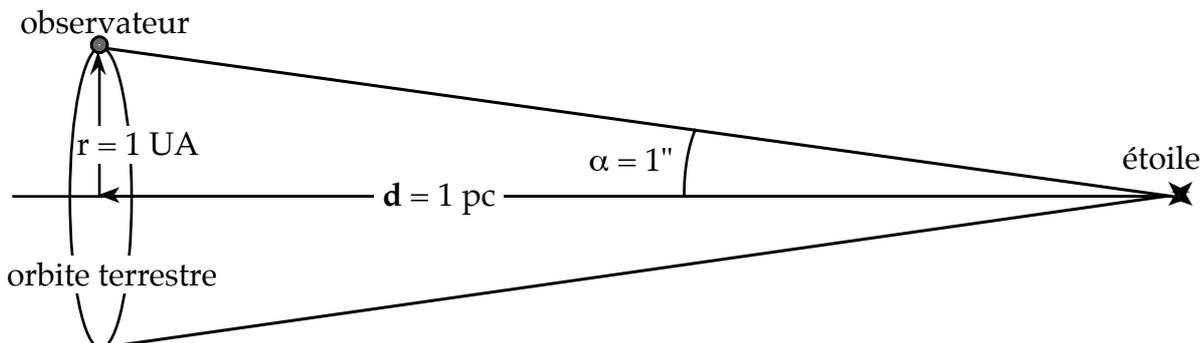
---

De  $Z$  on déduit la distance en faisant l'hypothèse que l'univers est en expansion, ce qui implique une relation entre la position d'un objet et sa vitesse d'éloignement par rapport à nous (loi de Hubble).  $Z$  est non linéaire pour les grandes distances cosmologiques à cause de la courbure de l'espace-temps.

## 2. Techniques de mesure des distances.

Les distances des objets lointains sont obtenues indirectement par un enchaînement de mesures à plusieurs échelles dont chacune est basée sur le résultat de la précédente. Le résultat final est d'autant moins précis qu'il y a plus de maillons intermédiaires.

2.1 Maillon initial : la parallaxe géométrique.



La distance des étoiles proches ( $< 100$  pc) peut se mesurer par parallaxe. On obtient la distance  $d$  d'une étoile à partir de la parallaxe (angle  $\alpha$  dans le dessin ci-dessus) correspondant au changement de direction de visée entre deux positions de l'observateur. Dans ce schéma, l'étoile est à 1 parsec de nous et sa parallaxe est de 1 seconde d'arc : en astronomie, la parallaxe est implicitement celle correspondant à un déplacement de l'observateur de 1 rayon d'orbite terrestre.

On a la relation :  $r = d \tan \alpha \Rightarrow d = r / \tan \alpha \Rightarrow d \approx r / \alpha$  ( $\alpha$  en radians).

La distance maximum mesurable dépend de la précision avec laquelle on mesure la parallaxe. Nous disposons depuis 1995 des mesures du satellite Hipparcos qui donne une précision de  $10^{-3}$  secondes d'arc sur les parallaxes de 120 000 étoiles. Cela donne les distances avec une précision de 10 à 20 % environ à l'intérieur d'une sphère de 100 parsecs de rayon centrée sur le système solaire. A l'échelle de la galaxie (disque de 30 kpc de rayon) c'est très peu ( $10^{-8}$  en volume). La plupart des amas d'étoiles sont à des distances beaucoup plus grandes.

L'interféromètre astrométrique GAÏA, prévu pour être mis en orbite par l'Agence Spatiale Européenne donnera à partir des années 2005 des parallaxes précises à  $10^{-5}$  secondes

d'arc sur des millions d'étoiles. On couvrira alors un tiers du diamètre de notre galaxie...

Pour tout ce qui est plus loin on doit, et pour encore longtemps probablement, recourir à des méthodes indirectes de mesure de distance. Les mesures Hipparcos, premier maillon, permettent de calibrer en luminosité absolue le diagramme HR des étoiles voisines du soleil.

---

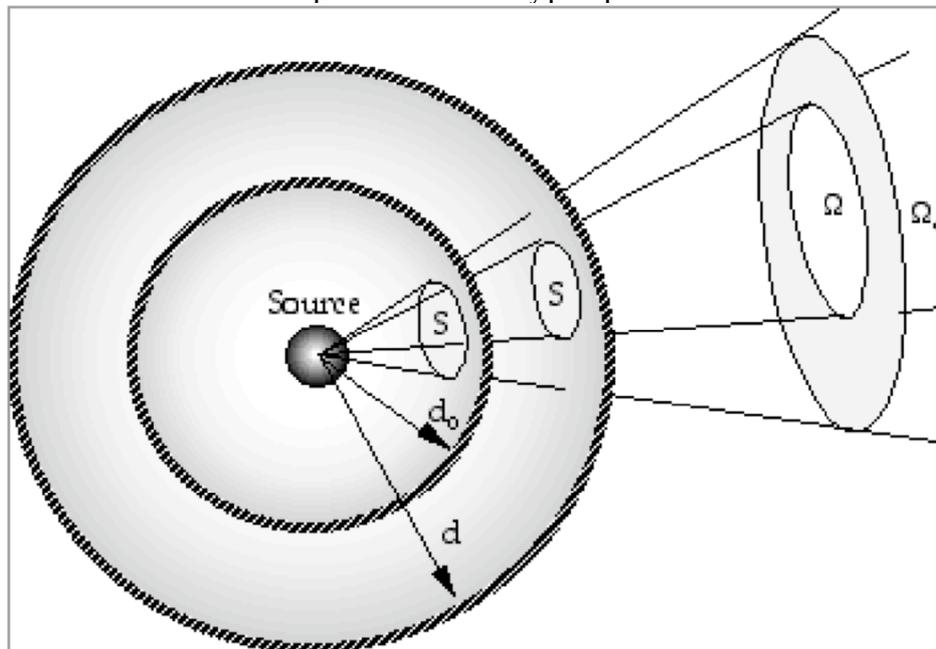
**exercice 2.1:** Voir les étoiles en relief

a) Relief à l'oeil nu : Avec une précision de 4 minutes d'arc sur une base de 10 cm. jusqu'à quelle distance voit-on le relief à l'oeil nu ? Etablir d'abord la formule, puis donner la distance à laquelle on a une précision de 30%.

b) Si l'on a une précision de 10- 5 secondes d'arc sur les mesures de parallaxe et que l'on utilise comme base le rayon de l'orbite terrestre, jusqu'à quelle distance a-t-on une précision relative supérieure à 10% ?

---

1.2.2 Deuxième maillon : distance par la relation type spectral - éclaircissement.



Si une source lumineuse rayonne de manière isotrope, la puissance  $p_r$  reçue par un télescope de surface donnée  $S$  à une distance  $d$  de la source sera :

$$p_r(S, d) = P S / (4\pi d^2)$$

où  $4\pi d^2$  correspond à la surface de la sphère de rayon  $d$  centrée sur la source, et  $P$  sa puissance totale rayonnée.

---

**exercice : Bronzage**

Calculer la puissance reçue du soleil par une surface de  $1\text{m}^2$  au sol sur terre.

L'atmosphère terrestre atténue le rayonnement solaire d'un facteur 1,35 par temps clair au niveau de la mer.

---

L'expression peut aussi s'écrire :  $p_r(S, d) = E(d) S$  ; avec  $E(d) = P / 4\pi d^2$

$E(d)$  est un éclaircissement en  $\text{Wm}^{-2}$ .

L'éclaircissement  $E$  reçu à une distance  $d$  de la source varie en  $d^{-2}$  :

éclairage reçu à la distance  $d_0$  :  $E(d_0) = P / (4\pi d_0^2)$

éclairage reçu à la distance  $d$  :  $E(d) = P / (4\pi d^2)$

$$\Rightarrow E(d) / E(d_0) = (d_0 / d)^2$$

A partir de la relation ci-dessus on peut calculer la distance d'un amas d'étoiles lointain à partir de son diagramme HR si l'on suppose que toutes les étoiles de cet amas sont à la même distance de nous, ce qui est une bonne approximation car l'amas est petit par rapport à la distance qui nous en sépare.

Dans ce qui suit

$P$  *luminosité absolue* est une puissance en  $W$ ,

$E(d)$  *luminosité apparente* est un éclairage en  $W m^{-2}$ .

Pour le voisinage du soleil on a établi un diagramme représentant la puissance totale émise  $P$  (*luminosité absolue*) de chaque étoile en fonction de son type spectral. C'est le diagramme HR, caractérisé par des zones où se regroupent les étoiles: séquence principale, branche des géantes, etc. On calcule la luminosité absolue  $P$  de chacune de ces étoiles à partir de la distance  $d$  mesurée par parallaxe et de l'éclairage reçu  $E(d)$ .

$P$  s'obtient en intégrant  $E(d)$  sur la surface de la sphère de rayon  $d$  :

$$P = 4\pi d^2 E(d)$$

Pour un grand nombre des étoiles de l'amas pris en exemple, on mesure le spectre et la luminosité apparente  $E(d_{amas})$ . On établit un diagramme HR de ces étoiles avec leur type spectral en abscisse et leur luminosité apparente  $E(d_{amas})$  en ordonnée. Ce diagramme HR de l'amas ainsi établi n'est pas calibré : Pour avoir des luminosités absolues en ordonnée il faudrait connaître la distance de ces étoiles. On y retrouve cependant des regroupements similaires à ceux du diagramme des étoiles voisines du soleil : les lois de l'évolution stellaire sont les mêmes partout. Les étoiles de l'amas sont à une distance uniforme de nous (au rayon de l'amas près) et les variations de leur luminosité apparente  $E(d_{amas})$  traduisent les variations de leur luminosité absolue  $P$ .

On peut calibrer l'échelle en luminosité du diagramme HR de l'amas en le "calant" sur le diagramme HR des étoiles voisines du soleil. On en déduit alors pour chaque étoile de l'amas sa luminosité absolue  $P$ . Comme on connaît déjà l'éclairage reçu  $E(d_{amas})$ , on déduit la distance  $d_{amas}$ .

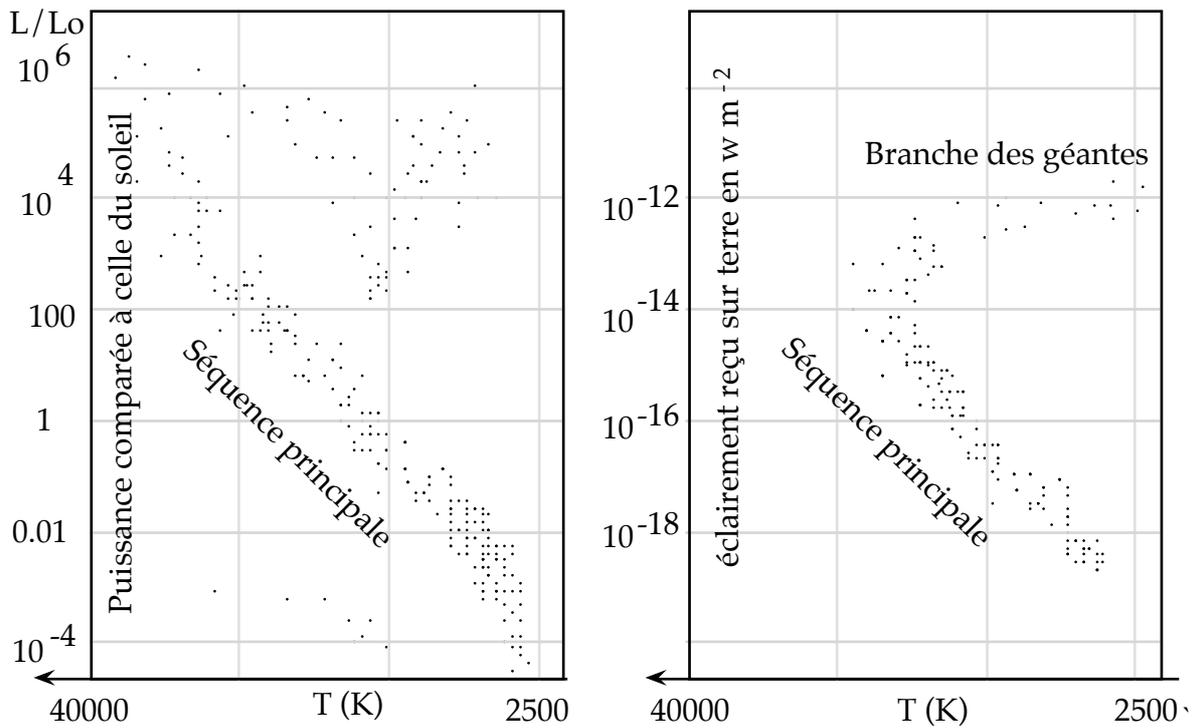
$$P = 4\pi d_{amas}^2 E(d_{amas}) \quad \Rightarrow \quad d_{amas}^2 = P / 4\pi E(d_{amas})$$

Plus riche est l'échantillon en étoiles de l'amas, meilleure est la calibration en luminosité de son diagramme HR et sa mesure de distance.

---

### **exercice 2.2** : Distances obtenues par calibration de diagrammes HR

La figure suivante montre deux diagrammes HR (température-luminosité). Celui de gauche a été obtenu à partir des spectres et luminosités des étoiles proches dont on connaît la distance. L'axe des ordonnées représente la luminosité de chaque étoile par rapport à celle du soleil ( $L_\odot$ ). Le diagramme de droite provient de l'analyse des spectres de nombreuses étoiles de l'amas Praesepe. l'axe des ordonnées représente les éclairages reçus. L'axe des abscisses est le même pour les deux diagrammes et représente les températures déduites des spectres.

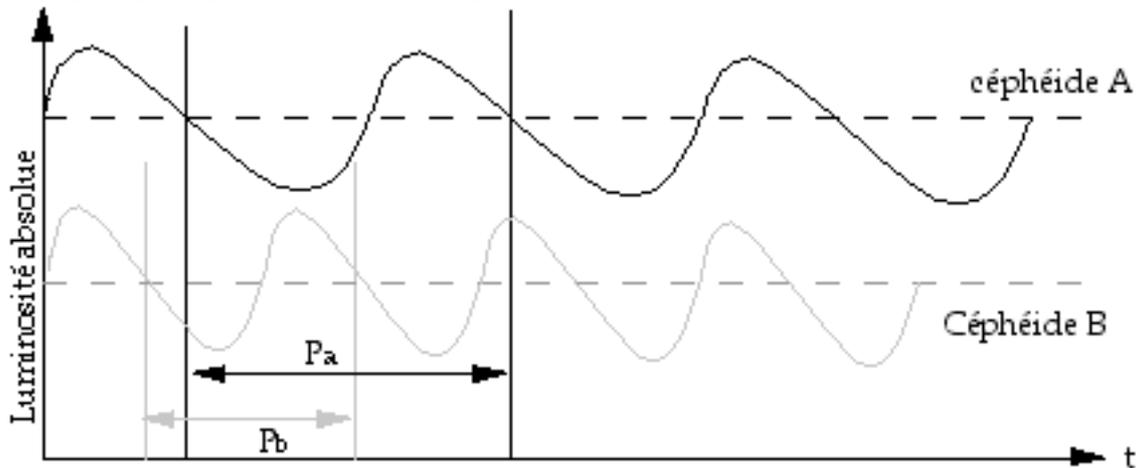


Trouver la distance moyenne des étoiles cet amas (proches les unes de autres par rapport à la distance qui nous sépare d'elles). L'éclairement au sol reçu du soleil est de  $1 \text{ kw m}^{-2}$ .

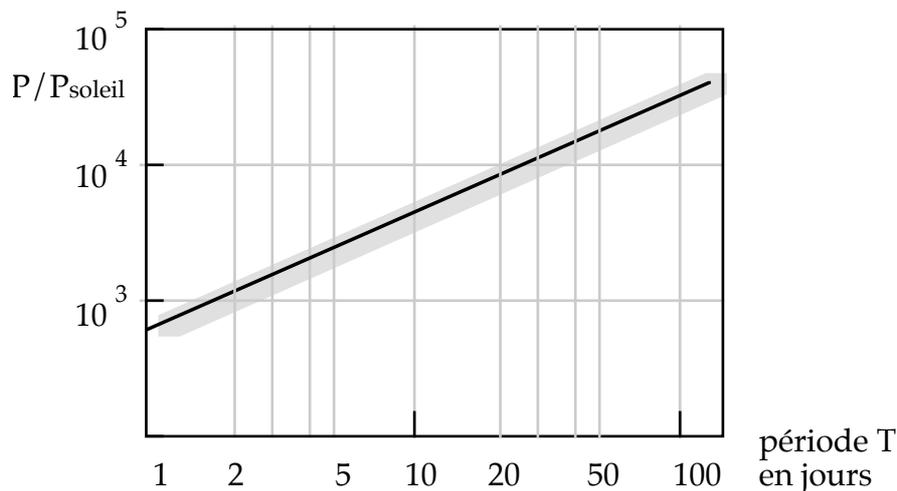
1.2.3

Troisième maillon : distance par mesure de la période d'une céphéïde.

Quand les amas sont trop lointains on ne peut plus mesurer le spectre de leurs étoiles de la séquence principale : celles-ci ne sont pas assez brillantes. On cherche à connaître la luminosité absolue de certaines géantes très brillantes, les Céphéïdes, non plus à partir de leur spectre mais à partir de la fluctuation périodique de leur luminosité : à ce stade tardif de leur évolution ces étoiles sont variables.



Une étude statistique des céphéïdes (calibrée sur des amas proches) a montré que la période de variation est liée à leur luminosité absolue moyenne : on a la relation  $P = f(L)$  suivante :



Relation période-luminosité des céphéides de type I  
 $P/P_{\text{soleil}}$  est le rapport entre la puissance de l'étoile et la puissance solaire.

Les céphéïdes sont des géantes suffisamment puissantes (c'est à dire brillantes) pour être identifiées et mesurées à plusieurs mégaparsecs. Connaissant la période  $T$  on déduit la puissance  $P$  de l'étoile, puis du rapport entre  $P$  et la luminosité apparente (éclairage reçu) on déduit la distance. On peut ainsi mesurer la distance des galaxies voisines à partir des céphéïdes qu'elles contiennent. L'un des problèmes associés à cette mesure est que l'on suppose que l'éclairage reçu par unité de surface est de la forme :

$$E(d) / E(d_0) = (d_0 / d)^2 \Rightarrow d = d_0 [ E(d_0) / E(d) ]^{1/2}$$

$\Phi(d_0)$  est l'éclairage qui serait reçu si la source était à une distance étalon  $d_0$ ,  
 $d$  est la distance réelle de la source.

Mais il y a des poussières dans le milieu interstellaire et l'absorption rajoute son grain de sable à la formule. On a en fait :

$$E(d) / E(d_0) = a (d_0 / d)^2$$

où  $a$  est un coefficient d'absorption compris entre 0 (rayonnement totalement absorbé, milieu opaque) et 1 (rayonnement totalement transmis, milieu transparent).

Le coefficient  $a$  dépend de la densité de poussières ou gaz interstellaires sur le trajet optique. On tente de l'évaluer par le "rougissement interstellaire" qui est la signature d'une absorption par les poussières, plus forte aux courtes longueurs d'ondes (rien à voir avec le décalage cosmologique des raies spectrales). L'incertitude sur la valeur de  $a$  est toujours une des causes principales d'incertitude sur les distances.

**problème 2.3 :** Voir pulser  $\delta$  Céphée.

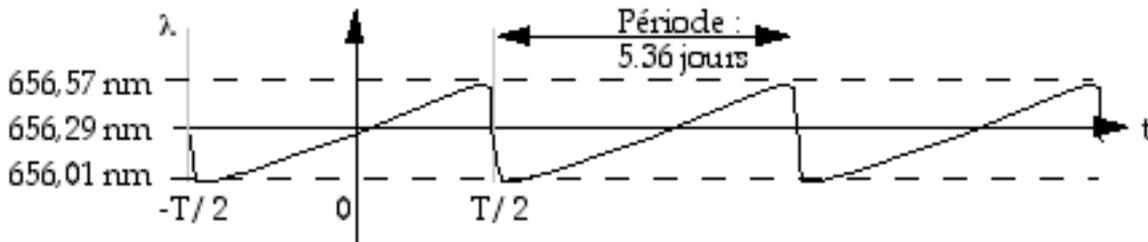
$\delta$  Céphée est la céphéïde la plus proche de la terre. Elle sert (avec d'autres) d'étalon d'éclairage pour calibrer la distance des céphéïdes plus lointaines, il est donc important de connaître sa distance précisément et de manière indépendante. C'est ce que vous allez faire, mais d'une façon originale et plus précise que par les autres méthodes. On vous donne pour cela les instruments les plus puissants disponibles actuellement.

D'abord un interféromètre stellaire optique. Avec cet instrument vous pouvez véritablement voir la forme et le diamètre angulaire des étoiles. La précision des mesures avec un tel instrument est de  $5 \times 10^{-5}$  seconde d'arc.

Ensuite vous avez un spectromètre capable de voir des raies spectrales fines et des décalages spectraux très faibles.

a) Avec le spectromètre, on observe les raies spectrales de  $\delta$  Céphée. A un moment donné elles sont toutes décalées vers le bleu mais un peu plus tard elles sont toutes décalées vers le rouge, puis de nouveau vers le bleu, et ainsi de suite (voir figure ci-dessous). Quelle explication voyez-vous à ce phénomène ? Que se passe-t-il précisément quand par exemple elles sont décalées vers le bleu ? On rappelle que d'une part l'étoile n'est pas double et que d'autre part le phénomène n'est pas dû à la rotation de l'étoile sur elle-même.

b) Voici la courbe du décalage spectral d'une raie de  $\delta$  Céphée en fonction du temps



Attention, ce n'est pas exactement le même type de courbe que pour la luminosité. Ici on va supposer que la courbe est sinusoïdale. Pour la raie spectrale donnée en exemple on a :  $\lambda_{\min} = 656,01 \text{ nm}$        $\lambda_{\text{moyen}} = 656,29 \text{ nm}$        $\lambda_{\max} = 656,57 \text{ nm}$   
Période de variation : 5.36 jours.

On suppose que la lumière observée est issue du point de la surface de l'étoile qui nous fait face et que  $\lambda_{\text{moyen}}$  correspond à une vitesse nulle.  
Quelle est la vitesse radiale maximale de la surface de l'étoile ?

c) Donner une expression analytique de cette vitesse en fonction du temps (il est conseillé de calculer la période en secondes).

d) En intégrant cette vitesse dans le temps, qu'obtient-on ?

e) Donner une expression analytique du diamètre de l'étoile en fonction du temps.

f) Quel est l'écart entre le diamètre minimum ( $d_{\min}$ ) et le diamètre maximum ( $d_{\max}$ ) de l'étoile ? Donner la réponse en m.

g) Maintenant vous prenez l'interféromètre stellaire. Celui-ci vous permet de mesurer le diamètre angulaire de  $\delta$  Céphée. Selon le moment où est faite la mesure, les résultats s'échelonnent entre une valeur minimum ( $\vartheta_{\min}$ ) et une valeur maximum ( $\vartheta_{\max}$ ). Donner une formule permettant de calculer la distance de l'étoile en combinant les mesures de l'interféromètre :  $\vartheta_{\min}$ ,  $\vartheta_{\max}$ , et les résultats obtenus avec le spectromètre :  $d_{\min}$ ,  $d_{\max}$ .

h)  $\vartheta_{\min} = 1.1 \times 10^{-3}$  secondes d'arc et  $\vartheta_{\max} = 2.1 \times 10^{-3}$  secondes d'arc.

donner la distance de l'étoile en m, puis en parsecs. (1 pc =  $3.09 \times 10^{16}$  m).

i) donner le diamètre minimum et le diamètre maximum de l'étoile.

j) compte tenu de la précision de l'interféromètre, donner l'incertitude sur la distance (on négligera l'incertitude sur les décalages spectraux).

*Question de point de vue :*

Que se passerait-il si l'on mettait une céphéide à la place du soleil ?

#### 1.2.4 Étalons d'éclairement et étalons de taille.

La mesure de distances plus grandes ne met pas en jeu les céphéides car elle ne sont pas assez lumineuses pour être vues. Pour les galaxies lointaines on recourt à des étalons moins précis mais plus brillants (dans l'ordre des distances et brillances croissantes) :

- Luminosité moyenne des étoiles non variables les plus brillantes.
- Luminosité moyenne des amas globulaires.
- Taille moyenne des régions H II (étalon angulaire).
- Luminosité des galaxies de type Sc I.
- Luminosité des supernovae à leur maximum (peut servir d'étalon angulaire indirect :

$$P = 4 \pi R^2 \sigma T^4$$

P est la puissance rayonnée (luminosité absolue).

R, le rayon de la supernova, est connu par intégration des vitesses radiales.

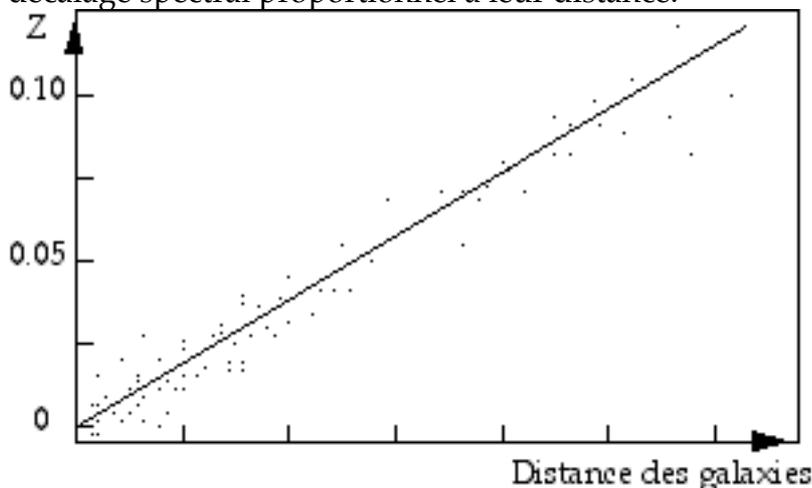
$\sigma$  est la constante de Stéphan.

T est la température absolue de la surface de l'étoile, déduite de son spectre.

- Luminosité moyenne des trois plus brillantes galaxies d'un amas
- relation entre largeur d'une raie d'émission C IV et luminosité absolue des quasars.
- relation entre la largeur spectrale de la raie O III et la luminosité absolue dans la raie H $\alpha$  pour les galaxies.

### 1.2.5 Distances déduites du décalage spectral

Le maillon ultime de mesure des distances est l'observation du décalage vers le rouge (red shift) des raies spectrales. Hubble a observé dans les années 1920 que les galaxies lointaines dont il avait pu mesurer indépendamment la distance et le spectre avaient décalage spectral proportionnel à leur distance.



Faisant l'hypothèse que ce décalage spectral était dû à l'effet Doppler, il en a déduit une vitesse relative pour chaque galaxie.

$$v \approx c \Delta\lambda/\lambda = c z \text{ (pour } \Delta\lambda/\lambda \ll 1)$$

Le diagramme indiquait une relation de proportionnalité entre leur distance D et leur vitesse v :

$$d = v / H_0$$

H<sub>0</sub> est la constante de Hubble : actuellement H<sub>0</sub> = 70 ± 20 km s<sup>-1</sup> Mpc<sup>-1</sup>

L'unité barbare (km s<sup>-1</sup> Mpc<sup>-1</sup>) vient du fait que l'on mesure les distances en mégaparsecs et les vitesses en km/s. C'est en fait l'inverse d'un temps.

---

**exercice 2.4 : Le mange-minutes**

Donner le temps correspondant à  $H_0^{-1}$ . Quelle signification physique a-t-il ?

---

Pour les grandes valeurs observées de  $z$  (par exemple 5,3 pour des galaxies lointaines) la vitesse déduite de l'effet Doppler n'est bien entendu pas supérieure à  $c$ .

On pourrait l'écrire :

$$v = \gamma^{-1} c z = \gamma^{-1} c \Delta\lambda/\lambda \quad \text{où } \gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$$

Ce qui donnerait :

$$z^2 = v^2 / (c^2 - v^2)$$

Mais cette "vitesse" n'a pas grand sens physique et mènerait à une expression erronée de la distance si l'on gardait une relation linéaire entre vitesse et distance. On exprime directement  $d$  en fonction de  $z$ . Cette relation entre  $z$  et  $d$  pour une source lointaine dépend de la courbure de l'univers et de la façon dont on veut exprimer la distance. Pour un modèle standard on peut prendre :

$$d = (c / 2H_0) [(1+z)^2 - 1]$$

où  $d$  est la variable pour laquelle la loi  $E(d) / E(d_0) = (d_0 / d)^2$  reste valable malgré la courbure de l'espace. Cette distance est appelée "distance photométrique". A cause de la courbure de l'espace elle ne correspond pas à celle que l'on trouverait en mesurant le parallaxe, ni à celle, encore différente, que l'on trouverait si l'on pouvait mesurer le temps de trajet de la lumière.

---

**exercice 2.5 : Espace courbe**

1) Quelle est la distance photométrique  $d$  d'un objet à  $Z = 4$  ?

2) Y a-t-il incompatibilité avec l'âge de l'univers (15 milliards d'années) ?

---

### 3. Instrumentation

Les instruments au sol donnent accès aux domaines visible, Infra-rouge proche et radio, pour observer les UV, X,  $\gamma$ , et les IR lointains il faut sortir de l'atmosphère. Il existe d'autres types d'ondes qui peuvent être émises par les objets astrophysiques : neutrinos (déjà observés), ondes gravitationnelles (non encore directement observées), et des particules cosmiques.

#### 3.1 Fonctionnement d'un télescope optique

Constituants d'un télescope actuel :

- Système de pointage, et de guidage  
types de montures au sol : équatoriale, alt-az, alt-alt, boule.
- Système de Focalisation de la lumière :  
Forme une image dans le plan focal.  
Collecte la lumière.

## 3.2 Diffraction

### Rapport entre diffraction et relation d'incertitude

La diffraction limite la résolution des instruments d'observation astronomique en limitant la finesse des images : une source ponctuelle sera focalisée non en un point, mais en une petite tache (la tache de diffraction) de rayon minimum  $\rho$ . Pour une ouverture circulaire, on a :

$$\rho = 1.22 \lambda f / d \quad \text{qui correspond à un angle } \Delta\theta = \rho / f = 1.22 \lambda / d$$

où  $\lambda$ ,  $f$  et  $d$  sont respectivement la longueur d'onde de la lumière utilisée, la focale, et le diamètre du télescope.

Il y a un lien entre la relation d'incertitude d'Heisenberg et la diffraction : prenons un photon dont on cherche à connaître, dans la direction perpendiculaire à sa propagation, à la fois la position et la quantité de mouvement.

L'incertitude sur la position du photon correspond à la taille  $a$  d'un diaphragme limitant l'étendue du faisceau qui le contient. L'incertitude sur la quantité de mouvement du photon correspond à la divergence  $\Delta\theta$  du faisceau après passage au travers de ce diaphragme.

$$\Delta x = a \quad ; \quad \Delta p = p \Delta\theta$$

La quantité de mouvement d'un photon vaut :

$$p = h\nu / c$$

Où  $h$  est la constante de Planck.

D'autre part la réponse impulsionnelle d'un système optique donne une relation entre  $a$  et  $\Delta\theta$  :

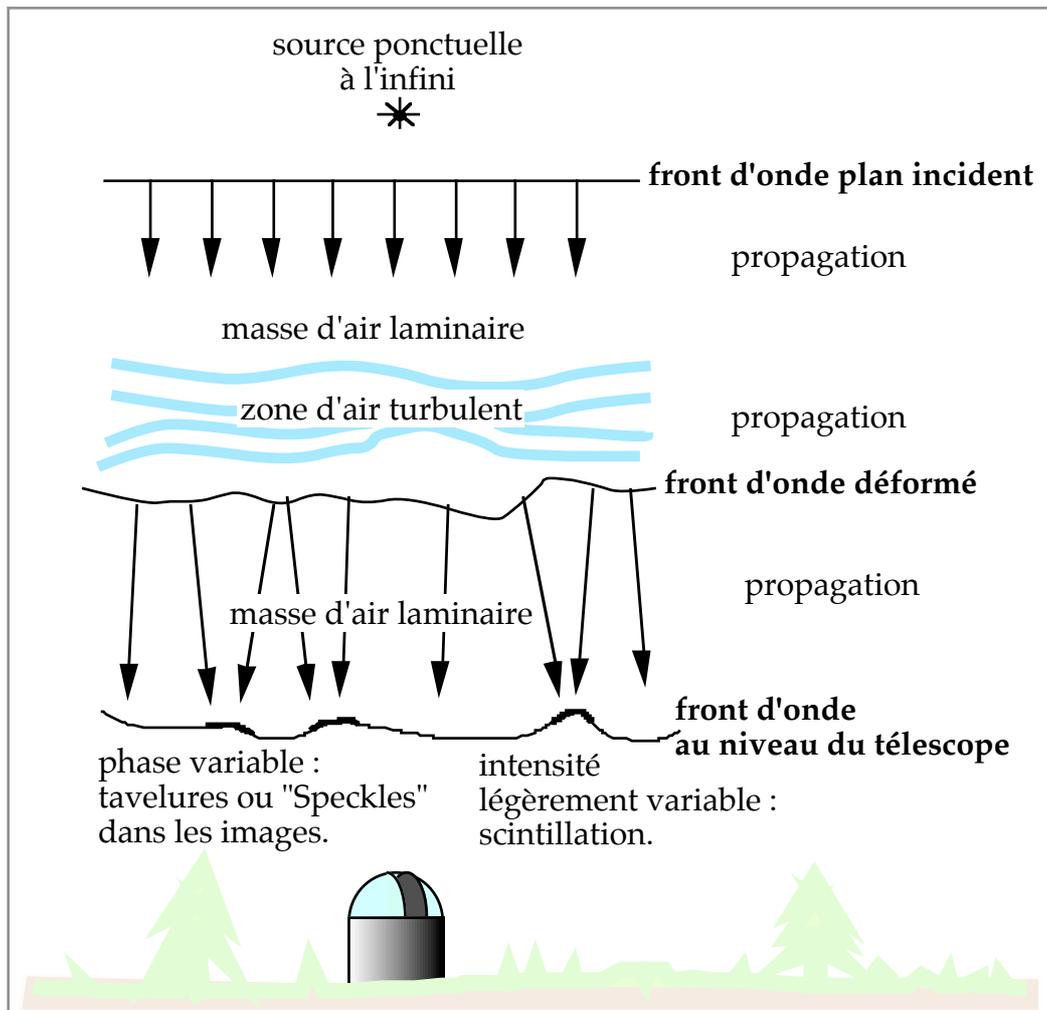
$$\Delta\theta = \lambda / a \quad \Rightarrow \quad \Delta p \Delta x = p \Delta\theta a = p \lambda = \lambda h\nu / c = h$$

On retrouve :  $\Delta p \Delta x = h$

La divergence d'un faisceau peut toujours être augmentée par des aberrations mais jamais réduite en dessous du seuil de la diffraction  $\Rightarrow \Delta p \Delta x \geq h$ .

On peut aussi facilement retrouver  $\Delta E \Delta t \geq h$  à partir de la cohérence spectrale. La relation d'incertitude est une conséquence de la TF et de la nature ondulatoire des objets auxquels elle s'applique.

### 3.2 Effet de la turbulence sur l'indice de l'air



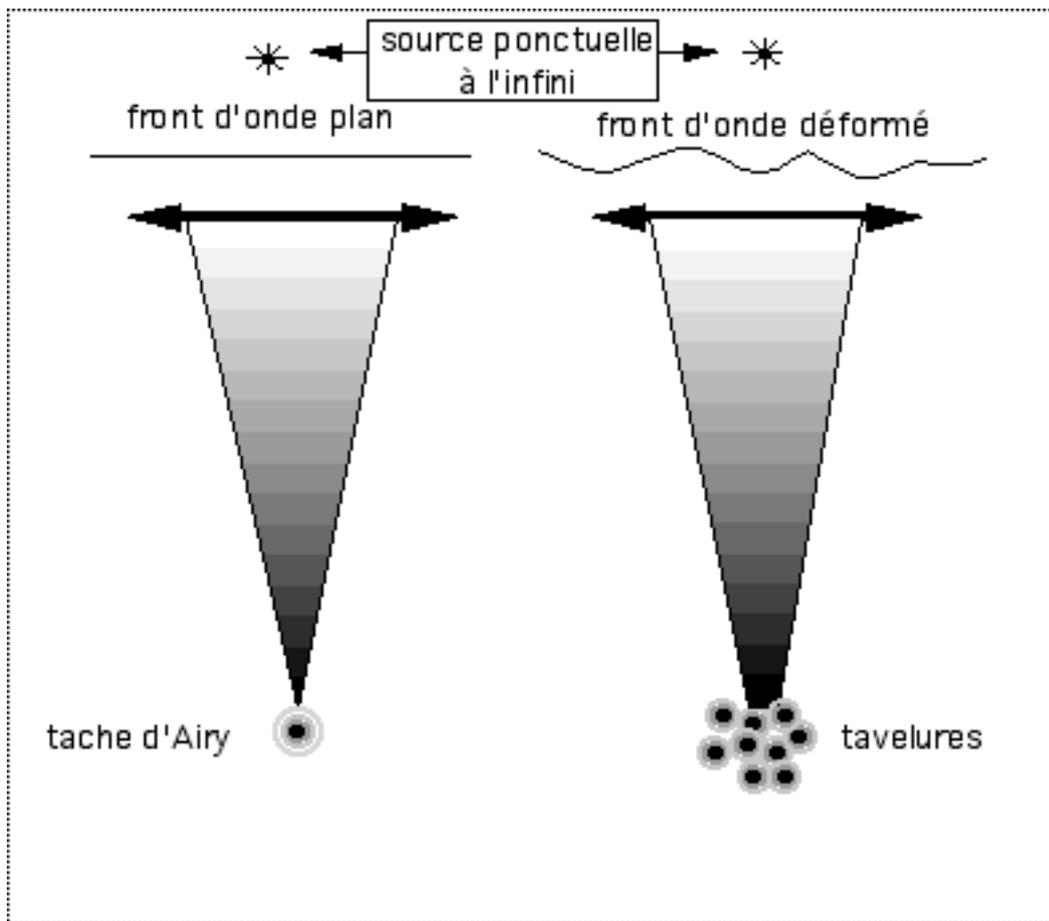

---

**exercice 3.1 :** Turbulence de l'air et dégradation des images

a) Calculer la différence de chemin optique  $L$  associée à la traversée d'une veine d'air "froid" de 0.25 m d'épaisseur ayant un écart en température de 1 °C avec l'air environnant : température de l'air environnant : 300 °K. L'indice de l'air est  $n = 1,0002817$  à  $\lambda = 400$  nm, et  $(n-1)$  varie proportionnellement à sa densité.

b) Cette veine d'air froid empiète sur une partie du passage de la lumière arrivant dans un télescope. Quels sont les effets sur les images données à  $\lambda = 400$  nm?

---



### expérience : Speckles en éclairage cohérent

matériel nécessaire : laser+lentille ( $f = 5$  à  $50$  mm) pour étaler le faisceau.

Fixer la lentille à la sortie du laser, regarder la tache du faisceau étalé sur un écran. Prenez les précautions nécessaires pour que le faisceau ou son reflet n'atteigne pas les yeux de quelqu'un. Ne jamais regarder fixement l'impact sur un écran d'un faisceau laser, même de faible puissance, s'il n'a pas été étalé par une optique quelconque : DANGER !

On voit des speckles sur l'écran car les différentes parties éclairées par le laser sont des sources cohérentes entre elles et leurs amplitudes s'ajoutent, formant des interférences sur la rétine. La taille angulaire des speckles vus par l'oeil vaut :

$\theta_s = \lambda/D$  où  $D$  est le diamètre de la pupille de l'oeil.

La taille angulaire de ces speckles ne dépend pas de la distance de l'oeil à l'écran. Elle dépend par contre de  $D$ . On peut faire varier celui-ci en plaçant un diaphragme devant son oeil.

voir le cours de J P Perez sur la fonction de transfert en éclairage cohérent.

### expérience : Speckles en éclairage incohérent.

Matériel nécessaire :

Lampe halogène de bureau ou une autre source ponctuelle.

Cache plastique dépoli (type couverture de cahier)

Négatif sur film à grain fin des masques ci-dessous ou à défaut trous d'épingle de  $\varnothing 1$  et  $0.2$

mm dans du papier d'aluminium.

Se placer à plusieurs mètres de la source lumineuse pour qu'elle apparaisse ponctuelle et la regarder avec le masque ci-dessus placé contre son oeil (diapositive ou alu). On observe la fonction de transfert incohérente sans aberration. En plaçant le plastique dépoli devant le masque on introduit des distorsions de phase et crée des speckles. Comparer les speckles vus à travers le trou  $\varnothing 1$  mm, le trou  $\varnothing 0.2$  mm et les deux ouvertures rapprochées.

---

### 3.3 Optique adaptative.

Dans les techniques précédentes de reconstructions d'image, on mesurait de plusieurs façons possibles la fonction de transfert, dans le but de corriger les aberrations qu'elle induisait dans les images. Maintenant on va *agir* directement et en temps réel sur la fonction de transfert, de manière à rendre  $H(x)$  le plus ponctuel possible. L'optique adaptative c'est en quelque sorte de la médecine préventive, en comparaison des méthodes précédentes qui sont "curatives".

## 4. Galaxies

### 4.1 Structure d'une galaxie spirale

Ce sont d'immenses regroupements d'étoiles, gravitationnellement liées. Leur masse totale varie beaucoup d'une galaxie à une autre, elle est de 10<sup>11</sup> masses solaires en moyenne. Les galaxies ne sont reconnues comme telles que depuis 1925, date à laquelle Hubble mit un terme à la polémique entre Curtis et Shapley sur leur nature en mesurant la distance de M31 (galaxie d'Andromède) par la méthode des céphéïdes. La distance trouvée (500 kpc), indiquait clairement que celle-ci est à l'extérieur de notre galaxie (diamètre 30 kpc).

---

**exercice 4.1 :** *Mais où est donc Andromède ?*

Vous détectez un céphéïde dans M31.

sa période de variation est  $P = 30$  jours

sa magnitude apparente correspond à un éclairement reçu au sol de  $10^{-15} \text{ W. m}^{-2}$

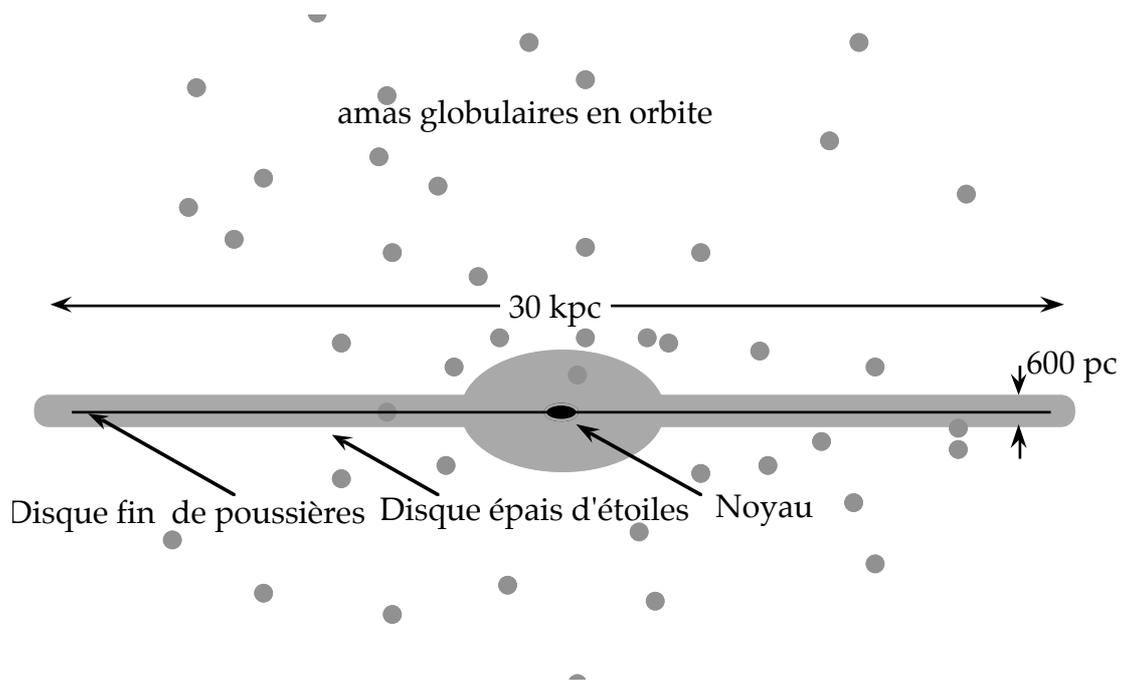
l'éclairement reçu au sol en provenance du soleil est de  $10^3 \text{ W. m}^{-2}$

Quelle est la distance de M31 si l'on néglige l'absorption interstellaire ?

---

Par opposition aux étoiles proches, vues ponctuelles, les galaxies extérieures apparaissent sous forme de taches floues avec des instruments peu puissants. On pouvait à l'époque les confondre avec des nuages de gaz ionisé de notre galaxie comme les régions HII et les nébuleuses "planétaires" (rien à voir avec les planètes, ce sont des résidus d'explosion stellaire).

Il y a quelque 10<sup>11</sup> galaxies dans les limites de l'univers actuellement observable, autant que d'étoiles dans une galaxie. Les plus courantes sont les spirales.



Galaxie spirale vue de profil

Les étoiles du disque ont un mouvement orbital autour du centre galactique (période d'environ 250 millions d'années) et un mouvement d'oscillation de part et d'autre du plan galactique. Ce mouvement d'oscillation permet de connaître le champ de gravité associé au disque (en mesurant la statistique des vitesses des étoiles) et d'en déduire la densité locale. En la comparant au nombre d'étoiles on trouve un résultat bizarre : la masse créant le champ gravitationnel est cinq fois plus élevée que la masse totale des étoiles observées. Il y a un problème de "masse manquante" que l'on retrouve à plusieurs échelles en cosmologie et que l'on explique par la présence de matière non rayonnante : gaz interstellaire, et d'autres sources de champ gravitationnel (inconnues à ce jour : masse des neutrinos ?).

Pour la partie centrale de la galaxie, les étoiles ne sont plus organisées en disque : leurs orbites semblent orientées aléatoirement. Le spectre de ces étoiles révèle une plus faible teneur en matériaux lourds (faible métallicité) que celles du disque. Elles sont en général plus âgées et leur faible métallicité vient du fait que le gaz qui les a formé n'a pas été enrichi par des générations d'étoiles précédentes. Ces étoiles sont appelées "population II", par opposition aux étoiles récentes du disque "population I". (Formule mnémotechnique : les étoiles de population II ont deux ans, celles de population I un an, donc plus jeunes).

On peut calculer la masse d'une galaxie à partir des vitesses radiales des nuages d'hydrogène neutre détectés en radio-astronomie dans la raie d'émission à  $\lambda = 21$  cm. Ces nuages sont détectables à des grandes distances du centre des galaxies et leur mouvement permet de mesurer la masse contenue à l'intérieur de leurs orbites.

---

**exercice 4.2 :** *Mesure de la masse de la galaxie d'Andromède.*

1) En partant des lois de la gravitation, montrer que pour un objet de masse négligeable en orbite circulaire autour d'un objet de masse  $M$  on a :

$$M = v^2 r / G$$

où  $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$  est la constante de la gravitation.

$r$  est le rayon de l'orbite.  
 $v$  est la vitesse linéaire le long de l'orbite.

2) On mesure la vitesse radiale des nuages d'hydrogène de cette galaxie par effet Doppler sur la raie d'émission à  $\nu_0 = 1420$  MHz ( $\lambda_0 = 21$  cm) de l'hydrogène neutre.

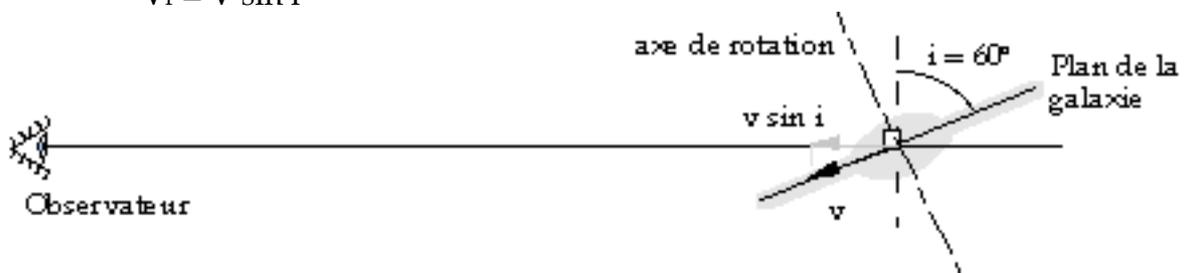
a) La fréquence de cette raie spectrale observée dans le disque de la galaxie n'est pas la même partout. Elle se répartit entre deux valeurs extrêmes :

$\nu_g = 1418,6$  MHz sur un bord du disque  
 $\nu_d = 1421,4$  MHz sur le bord opposé du disque

En déduire  $\Delta F / F$  puis  $\Delta V_r$ , où  $V_r$  est la vitesse projetée sur la ligne de visée (vitesse radiale). Finalement déduire  $V_r$ , vitesse radiale d'un bord de la galaxie par rapport à son centre. On supposera que les vitesses sont symétriques par rapport au centre de la galaxie.

b) Le disque de la galaxie est incliné d'un angle  $i = 60^\circ$  par rapport au plan du ciel. Pour une vitesse réelle  $V$  dans le plan de la galaxie, la vitesse radiale  $V_r$  observée vaut :

$$V_r = V \sin i$$



En déduire la vitesse orbitale  $V$  réelle.

3) On a mesuré la distance de la galaxie et trouvé  $D = 600$  kpc. Les nuages d'hydrogène neutre sont observables jusqu'à un écart angulaire  $\alpha$  de 2 degrés du centre de la galaxie. Trouver le rayon de leur orbite, que l'on supposera circulaire, et la période de rotation.

4) Quelle est la masse de cette galaxie ?  
 A combien de masses solaires cela correspond-il ?

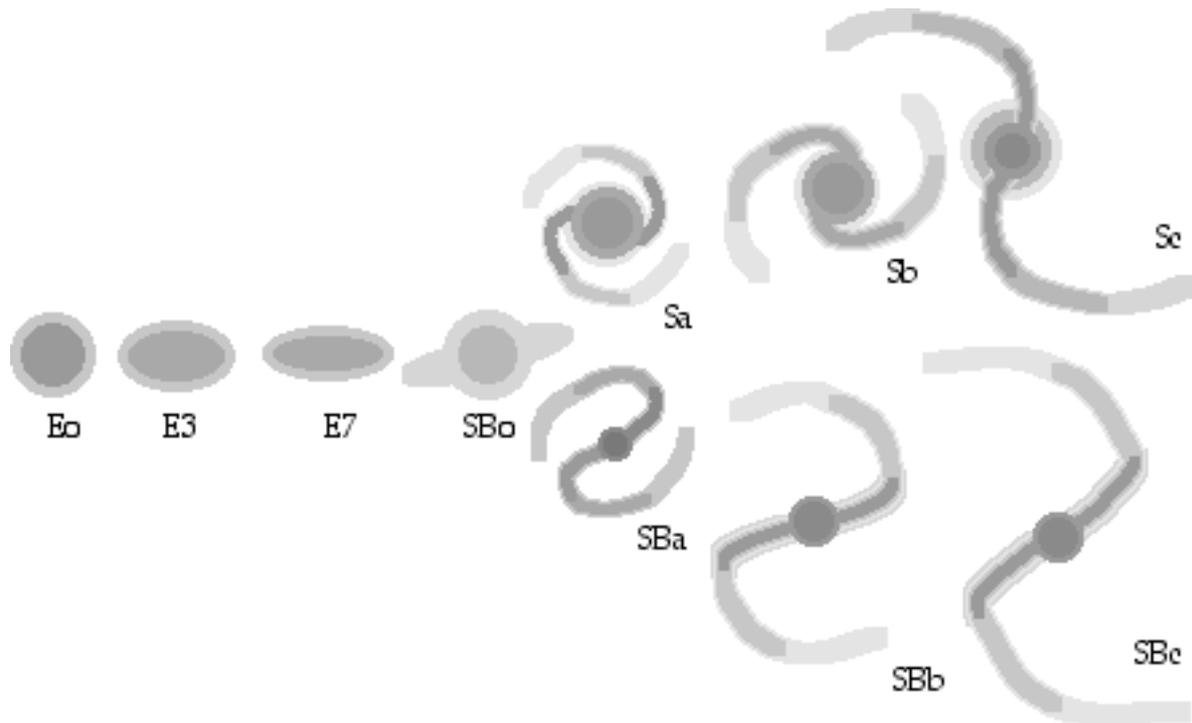
---

On détermine la masse des galaxies elliptiques par statistique des vitesses d'étoiles : Ces galaxies ne contenant pas de nuages de gaz, on ne peut pas détecter d'émission à 21 cm.

On peut aussi calculer la masse totale d'une galaxie à partir de la statistique de vitesses des amas globulaires qui orbitent autour. On trouve des valeurs encore plus élevées mais entachées d'incertitude car les orbites de amas globulaires ne sont pas dans le plan du disque et de ce fait assez complexes.

## 4.2 Classification de Hubble

D'autres types de galaxies que les spirales sont observées : 10% environ sont des elliptiques. Une tentative de classifications fut faite par Hubble, sur le modèle de la classification des espèces animales par les zoologistes du 19<sup>ème</sup> siècle. Cette classification des elliptiques, spirales et spirales barrées ne correspond pas à l'évolution temporelle d'une galaxie donnée. Certaines galaxies ont des formes inclassables, dites irrégulières : c'est le résultat de collisions en cours ou récentes entre galaxies.



### Classification de Hubble

## 4.3 Évaporation et effondrement des amas globulaires

A l'intérieur d'un amas, les étoiles sont liées par leur attraction gravitationnelle mutuelle. Leurs orbites sont instables et on ne sait pas les calculer analytiquement (problème à  $n$  corps). On en fait des simulations numériques avec un nombre limité d'étoiles. On peut aussi faire une étude statistique moyennant quelques approximations :

L'énergie potentielle d'un couple d'étoiles de masse égale en interaction gravitationnelle est donné par :

Energie potentielle pour un couple étoiles :  $E_p = - Gm^2/R$

où  $R$  est la distance entre les étoiles et  $m$  leur masse individuelle. Considérons l'amas comme formé de  $N$  étoiles de masses égales, chaque étoile étant liée gravitationnellement aux  $N-1$  autres. On a  $N(N-1)/2$  liaisons. Mettons les distances entre étoiles toutes égales à  $R$ , l'énergie potentielle s'exprime par :

Energie potentielle pour tout l'amas :  $E_{pa} = - N(N-1) Gm^2 / 2R$

Le théorème du Viriel donne :  $E_c = - E_p / 2$

Pour tout l'amas :  $E_{ca} = - E_{pa} / 2 \Rightarrow E_{ca} = N(N-1) Gm^2 / 4R$

Par ailleurs on sait que pour tout l'amas :  $E_{ca} = NmV^2 / 2$

En mettant ces deux équations ensemble :  $V^2 = (N-1) Gm / 2R$

Ceci donne la vitesse moyenne  $V$  des étoiles dans l'amas.

Par ailleurs on peut trouver la vitesse de libération  $V_e$  d'une étoile de l'amas (par définition, si  $V > V_e$ , l'étoile s'échappe de l'amas). Prenons une étoile supposée être à une distance  $R$  du centre, elle est liée aux  $N-1$  autres de l'amas, et elle se déplace à la vitesse de libération :

on a son énergie potentielle :  $E_{pe} = - (N-1) Gm^2 / R$

et son énergie cinétique :  $E_{ce} = mV_e^2 / 2$

A la vitesse de libération on a par définition :  $E_{ce} = -E_{pe}$   
 En mettant ensemble les expr. ci-dessus :  $V_{e2} = 2 (N-1) Gm / R$

On voit que  $V = V_e / 2$ . Il faut cependant considérer  $V$  comme une vitesse moyenne, les rapprochements occasionnels entre étoiles se traduisent par des perturbations et des changements de direction. Leur effet cumulé sur un temps assez long crée une dispersion des vitesses qui obéit aux mêmes équations que celle des molécules dans un gaz (distribution de Maxwell - Boltzmann). Il y a une différence cependant : la queue de distribution à des vitesses  $V > V_e$  n'existe pas dans un amas ; ces étoiles sont rapidement éjectées.

Les perturbations gravitationnelles tendent cependant à rétablir la partie à grande vitesse de la distribution, et de nouvelles étoiles sont éjectées. Les amas 's'évaporent'. L'énergie nécessaire à l'évaporation est puisée dans le reste de l'amas : le rayon du coeur diminue. On peut estimer les temps d'évaporation des amas en fonction de leur temps de relaxation (temps moyen entre deux frôlements d'étoiles). Les temps d'évaporation moyens sont de  $3 * 10^9$  ans pour un amas ouvert et  $8 * 10^{10}$  ans pour un amas globulaire.

#### 4.4 Théorème du Viriel (Clausius, 1870) .

Pour une particule de masse  $m$  et de vitesse  $v \ll c$ , l'énergie cinétique vaut

$$E_c = 1/2 mv^2 .$$

Pour un ensemble de particules de masses  $m_i$  et de vitesses  $v_i$ , on a

$$E_c = 1/2 \sum m_i v_i^2 = 1/2 \sum p_i dr_i / dt \quad (1)$$

où  $p = mv$  ;  $r$  est la position à partir d'une origine arbitraire.

Par ailleurs, l'expression de la dérivation d'un produit de fonctions donne

$$\frac{d}{dt} (p r) = r \frac{dp}{dt} + p \frac{dr}{dt} \Rightarrow p \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} (p r) - r \frac{dp}{dt} \quad (2)$$

en appliquant (2) à (1), on trouve

$$E_c = 1/2 \sum d(p_i r_i) / dt - 1/2 \sum r_i dp_i / dt . \quad (3)$$

$dp/dt = F$ , la force appliquée sur une masse. Appliquée dans (3), cette relation donne

$$E_c = 1/2 \sum d(p_i r_i) / dt - 1/2 \sum r_i F_i . \quad (4)$$

On va s'intéresser maintenant à la moyenne dans le temps de  $E_c$ . On va voir que le premier terme de l'expression (4) tend vers zéro quand on moyenne sur un temps infini.

Définissons  $G = \sum p_i r_i$  et  $g = dG/dt$

$$E_c = 1/2 g - 1/2 \sum r_i F_i . \quad (5)$$

$$\langle E_c \rangle_\tau = 1/2 \langle g \rangle_\tau - 1/2 \langle \sum r_i F_i \rangle_\tau . \quad (6)$$

$$\langle g \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} [G(T) - G(0)] \quad (7)$$

Les valeurs de  $G$  sont bornées car les  $p_i$  et  $r_i$  ne peuvent pas être infinis. Le facteur  $1/T$  fait donc tendre  $\langle g \rangle$  vers zéro pour  $T$  grand.

On a donc

$$\langle E_c \rangle_\tau = - 1/2 \langle \sum r_i F_i \rangle_\tau = - 1/2 v . \quad (8)$$

On appelle "Viriel" la quantité

$$v \equiv \langle \sum r_i F_i \rangle , \quad (9)$$

qui est homogène à un travail. Dans le cas où les forces sont dues à un champ de gravité centré en  $r = 0$ , on va voir que le viriel correspond à l'énergie potentielle moyenne : La force appliquée sur une particule de masse  $m$  vaut

où  $G$  est la constante de la gravitation,  $M$  la masse causant le champ de gravité et  $\mathbf{u}$  le vecteur unité orienté de  $M$  vers  $m$ . Injectant (10) dans (9) donne

$$v = - \sum \langle GM m_i / r_i \rangle . \quad (11)$$

Or l'énergie potentielle d'une particule dans ce champ s'exprime par

$$E_p = \int_{\infty}^r F dr = - \frac{GMm}{r} \quad (12)$$

Le viriel correspond donc à l'énergie potentielle moyenne du système

$$v = \langle E_p \rangle , \quad (13)$$

et d'après l'expression (8) on trouve

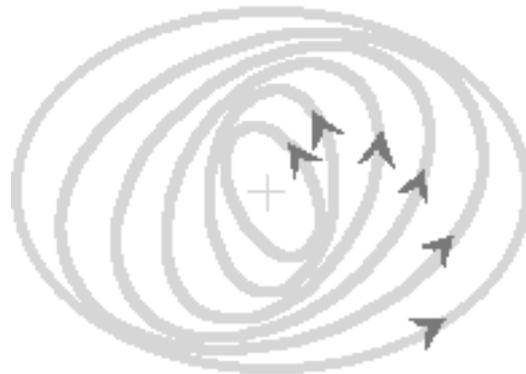
$$\langle E_c \rangle = - 1/2 \langle E_p \rangle . \quad (14)$$

Pour l'énergie mécanique

$$\langle E \rangle = \langle E_c \rangle + \langle E_p \rangle = 1/2 \langle E_p \rangle . \quad (15)$$

#### 4.5 Origine des bras spiraux

Si l'on considère que les orbites des étoiles du disque sont initialement circulaires, des instabilités peuvent se développer et les rendre elliptiques centrées. Si les grands axes de ces orbites ne sont pas alignés mais forment un angle croissant avec le grand axe, on va avoir des zones de rapprochement en forme de bras spiraux :



Le mouvement orbital des étoiles et gaz galactiques est indépendant de la rotation des bras spiraux, que l'on peut considérer comme des ondes de densité. On montre que ces ondes de densité tournent dans le même sens que le mouvement orbital, mais de manière monolithique et plus lente. Les étoiles et nuages de gaz, parcourant leurs orbites passent successivement dans des zones à haute et faible densité. Le passage dans les zones à haute densité déclenche la contraction gravitationnelle des nuages de gaz et la formation d'étoiles.

On observe ces zones de compression et de formation d'étoiles sur les galaxies voisines : une bande sombre juste à la partie interne (amont) des bras spiraux et des régions H II, rendues lumineuses par des étoiles brillantes donc jeunes, juste derrière.

---

### Question 4.3

Pourquoi les étoiles brillantes sont-elles en général jeunes ?

### Réponse

Elles sont jeunes au sens chronologique du terme, mais vieillissent très vite. Parce qu'elles sont très brillantes elles épuisent rapidement l'hydrogène de leur cœur.

---

La période de rotation du soleil autour du centre galactique étant de 250 millions d'années environ, il doit subir tous les 150 à 300 millions d'années un taux accru de formation d'étoiles chaudes dans son voisinage. Dans le cadre des rapprochements (d'idées) hasardeux, les dinosaures ont disparu il y a 165 millions d'années...

### 4.6 Étalonner les luminosités de galaxies : la relation de Fischer-Tully

C'est une méthode pour déterminer la luminosité absolue d'une galaxie (et donc sa distance) à partir de sa vitesse de rotation sur elle-même. Elle a été observée empiriquement mais on lui trouve une justification théorique. La luminosité d'une galaxie spirale est proportionnelle à la puissance 4 de sa vitesse orbitale maximale :

$$L = a V^4$$

On peut déduire cette relation d'un modèle simplifié de galaxie en faisant l'approximation que la brillance par unité de surface d'une galaxie est constante jusqu'à un rayon donné  $r_0$  (ce n'est pas très rigoureux) :

$$L = \pi r_0^2 l_0 \quad (2.1)$$

$r_0$  est le rayon.

$l_0 = \text{Cste}$ , est la brillance par unité de surface

On fait ensuite l'hypothèse que si sa brillance par unité de surface est constante, la masse d'étoiles par unité de surface :  $\mu_0$  est aussi constante. On en déduit une relation entre la masse totale  $M$  à l'intérieur d'un rayon  $r_0$  et la luminosité correspondante :

$$\mu_0 = \alpha l_0 = \text{Cste} \quad \Rightarrow \quad M = \pi r_0^2 \mu_0 = \pi r_0^2 \alpha l_0$$

Si les étoiles sont en mouvement orbital, on a une relation entre la masse totale et la vitesse orbitale pour une orbite de rayon  $r_0$  :

$$V^2 = GM / r_0 = G \pi r_0^2 \mu_0 / r_0 = G \pi r_0 \mu_0 \quad \Rightarrow \quad r_0 = V^2 / \pi G \mu_0$$

En remplaçant  $r_0$  dans la relation (2.1) :

$$L = V^4 l_0 / \pi G^2 \mu_0^2$$

Donc  $L$  proportionnel à  $V^4$ . On peut se servir de la luminosité absolue en la comparant à la luminosité apparente pour déterminer la distance.

---

### Exercice 4.4 : Et pourtant elles tournent

Un astronome voit d'une galaxie sous un **rayon** apparent  $\gamma = 0,5^\circ$ .

1) Quel est le déplacement angulaire d'une étoile du bord du disque en dix ans si la

période de rotation de cette galaxie est 250 millions d'années ?

1a) donner l'angle  $\alpha$  vu du centre de la galaxie.

1b) donner l'angle  $\beta$  vu de la terre.

2) Un astronome a fait deux clichés de cette galaxie à dix ans d'intervalle. Pourra-t-il détecter le déplacement des étoiles dû au mouvement orbital autour du centre de masse de cette galaxie ? (il dispose d'un télescope donnant une résolution de  $0,1''$ ).

3) Quel est l'intervalle de temps minimum entre deux clichés de la galaxie pour qu'il puisse mettre en évidence le déplacement des étoiles ?

4) devra-t-il vraiment attendre aussi longtemps ? Pourquoi ?

---

## 4.7 rapports M/L

Si l'on compare le rapport Masse sur Luminosité ou "M/L" du soleil à celui d'une galaxie, on trouve une valeur supérieure à 1 :

Objet "M/L" =  $(M_{\text{gal}}/M_{\text{sol}}) / (L_{\text{gal}}/L_{\text{sol}})$

Soleil : 1

Spirales : 3 à 5

Elliptiques : 10 à 20

Bien que la majorité des étoiles soient moins massives que le soleil et de ce fait aient des rapports M/L supérieurs à 1 (la luminosité d'une étoile varie fortement en fonction de sa masse), la masse totale d'une galaxie correspond à plus que la somme des masses des étoiles vues. La masse "invisible" peut être sous forme d'étoiles non détectées : naines noires, étoiles à neutrons ou trous noirs, ou de gaz non encore formé en étoiles, ou de matière non baryonique. Elle représente de 60 à 80% de la masse totale pour les galaxies spirales.

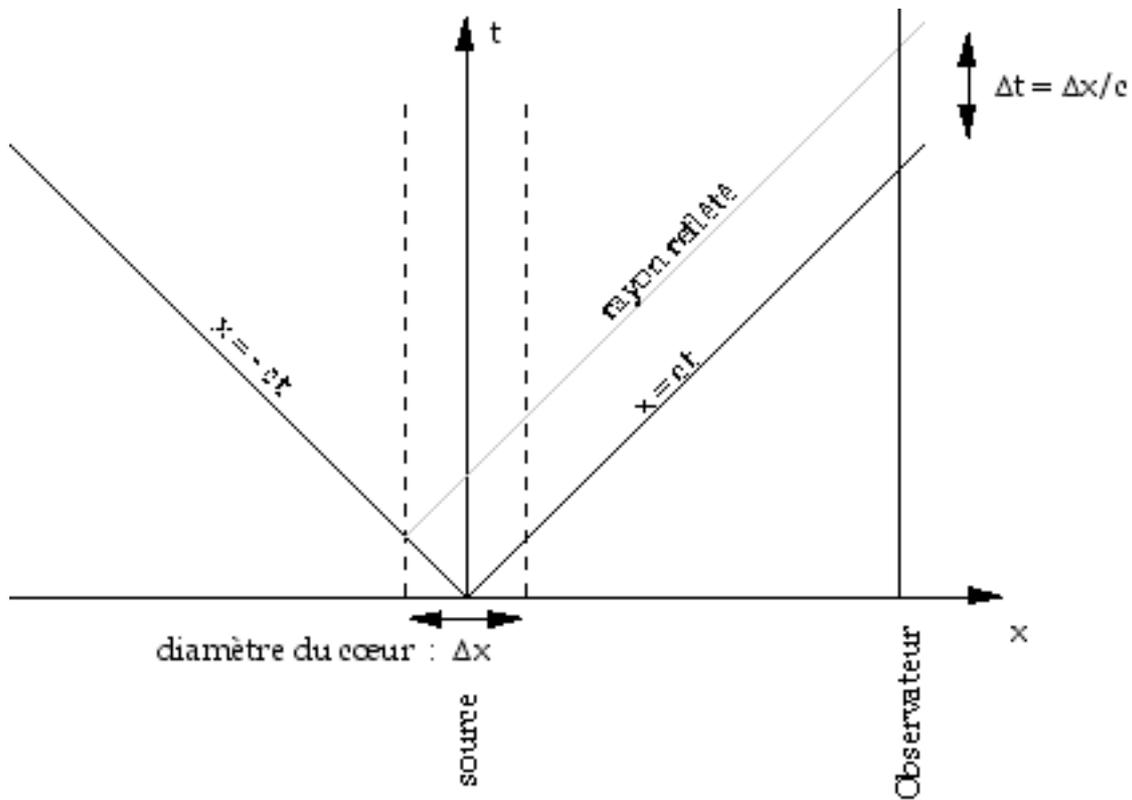
## 4.8 Galaxies actives, Quasars, Jets

On appelle galaxies à noyau actif (Seyferts, BL Lac, Quasars, QSOs) celles dont le noyau est particulièrement brillant et vu quasi ponctuel. Le spectre contient parfois des raies d'émission larges sur un fond continu non thermique, i.e. qui ne correspond pas à un spectre de corps noir. Le continu du spectre est en loi de puissance, avec une partie détectée dans les domaines  $\gamma$ , X et radio.

Historiquement ces objets ont été pris pour des étoiles particulières, leur nature extragalactique n'a été découverte que récemment.

- BL Lac : C'est sous ce nom que les observateurs d'étoiles variables l'ont cataloguée. C'est en fait le coeur très brillant d'une galaxie elliptique géante, variable d'un facteur 15 à l'échelle de quelques jours. La galaxie qui l'entoure n'a été détectée qu'en 1975 car très peu lumineuse par rapport au coeur. On observe plusieurs galaxies de ce type réparties aléatoirement dans le ciel, auquel on donne le nom générique "les BL Lac". Elles sont aussi détectées en radio.

La variabilité rapide de ces objets donne un indice sur leur taille maximum :



Dans ce diagramme  $x$ ,  $t$  (le temps et une dimension d'espace), on choisit les échelles en  $x$  et en  $t$  de manière à ce qu'un rayon lumineux (se propageant à la vitesse  $\pm c$ ) soit représenté par une droite de pente  $\pm 1$ .

On voit qu'une source lumineuse de taille  $\Delta x$  qui émettrait un flash serait vue lumineuse pendant une durée  $\Delta t = \Delta x / c$ .

- Les galaxies de Seyfert sont des spirales avec un coeur très brillant, comme les BL Lac.
- Les quasars (de QUASI Stellar) sont une autre variété de galaxie, à noyau actif encore plus brillant que celui des BL Lac et des Seyferts. Ce sont les objets les plus lointains détectables (à part le rayonnement cosmologique à 3 K) on les observe jusqu'à des distances de  $z = 5$ .

On n'observe pas de quasars proches. La raison en serait leur durée de vie limitée, ou ce qui revient presque au même, une baisse de puissance au cours du temps. En effet, on voit les objets tels qu'à un temps :

$$t = t_0 - d/c$$

$t_0$  est le présent.

$d$  est leur distance.

$c$  la vitesse de la lumière.

Pour les quasars,  $d/c$  est une fraction non négligeable de l'âge de l'univers. Leur temps de vie  $y$  est donc inférieur et il ne s'en forme plus maintenant.

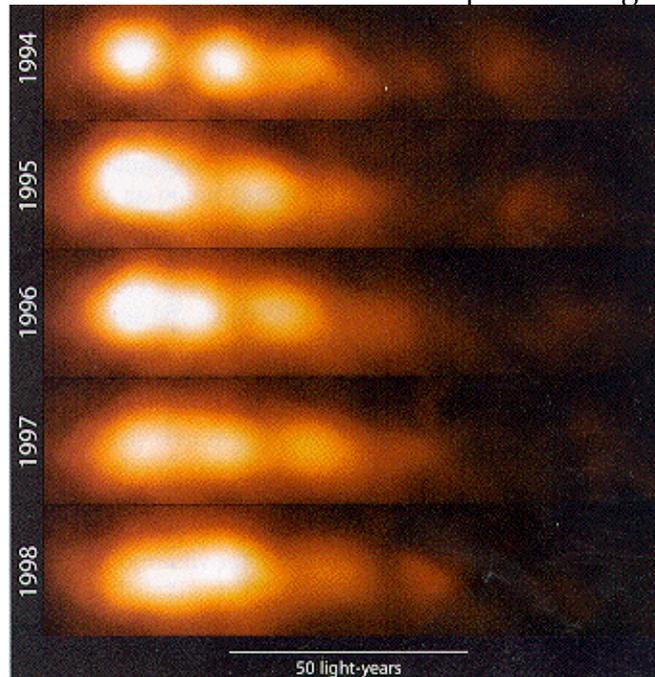
- Les QSOs (Quasi Stellar Objects) ne sont observés qu'en radio astronomie. Ils ont les mêmes caractéristiques spectrales (en radio) et morphologiques que les quasars mais n'ont pas de contrepartie optique détectée.

Certaines galaxies à noyau actif, dont les quasars et QSOs, sont entourées d'un ou deux jets diamétralement opposés, détectés en radio ou en optique. Certains de ces jets sont

discontinus (genre signaux de fumée) et l'on observe leur déplacement apparent entre deux images prises à plusieurs années d'intervalle. Par exemple un déplacement angulaire de 4 millisecondes d'arc en trois ans pour le jet du quasar 3C273.

Si l'on calcule la vitesse linéaire de ces jets, compte tenu de la distance du quasar, on trouve des valeurs supérieures à  $c$ . La vitesse réelle du jet est bien-sûr inférieure à  $c$ , son apparence superluminique est expliquée dans un des exercices suivants qui concernent différents cas de vitesses superluminiques.

La figure suivante montre l'évolution au cours du temps de l'image du quasar 3C273.



Évolution de 3C273 (isophotes radio)

---

**Exercice 4.5 :** *Phare superluminique.*

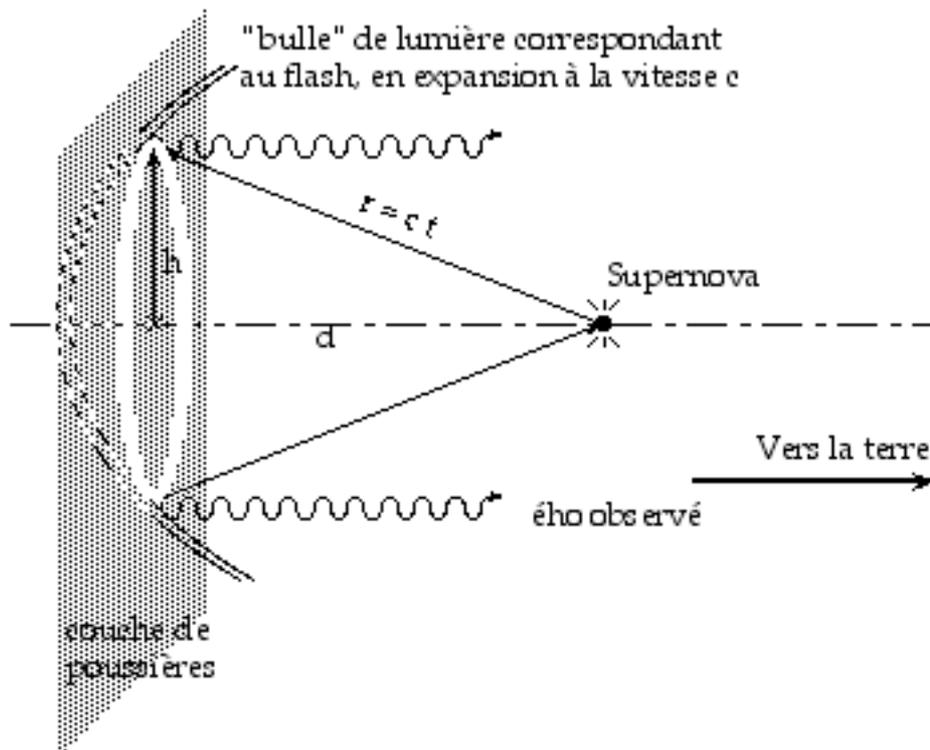
On approxime dans cet exercice simple les ondes radio émises par un pulsar au faisceau d'un phare de marine. Ce pulsar tourne sur lui-même à 1 tour par seconde.

- Donner l'expression de la vitesse de passage du faisceau au niveau du système solaire. Définissez vous-même les variables nécessaires. Faites un schéma.
- Donner la valeur numérique de cette vitesse si nous sommes à 200 parsecs du pulsar.
- Si la vitesse trouvée est supérieure à  $c$ , cela remet-il en cause la théorie de la relativité ? Pourquoi ?

---

**Exercice 4.6 :** *Le Halo de la Supernova*

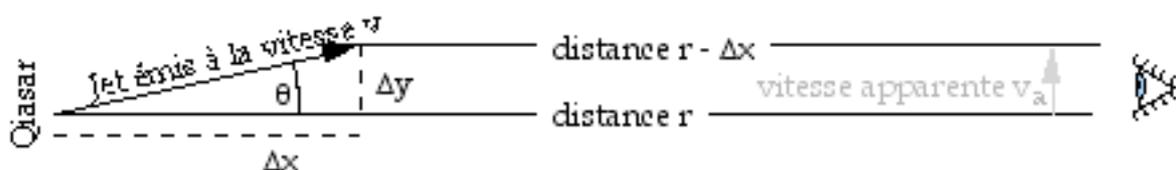
Un exemple de mouvement superluminique observé en optique : les anneaux écho de la supernova SN 1987 A.



Cette étoile a "explosé" en février 1987 . Depuis 1988 on observe des anneaux autour, dont la rayon semble croître plus vite que la vitesse de la lumière. On explique ce phénomène par l'écho du "flash" de l'étoile sur des nébuleuses de poussières situées en arrière-plan. Le rayon de l'anneau écho observé est noté  $h$  et la distance entre la supernova et les poussières notée  $d$ . On prend  $t = 0$  à l'explosion de la supernova et  $t = t_0$  au moment où la lumière atteint la couche de poussières :  $d = c t_0$ . Donner une expression de la vitesse apparente d'expansion de l'anneau écho.

#### Exercice 4.7 : Jet Superluminaire

Mouvement superluminaire observé en radio, illustré dans le "film" plus haut. Un quasar émet un nuage de gaz à la vitesse  $v$  dans une direction proche de la ligne de visée, faisant un angle  $\theta$  avec celle-ci.



- 1) Donner l'expression de la vitesse apparente  $v_a$  en fonction de  $\beta = v/c$  et de l'angle  $\theta$ .
- 2) Pour une valeur donnée de  $\beta$ , quelle est l'angle  $\theta$  donnant la valeur maximale de  $v_a$  .
- 3) Calculer les valeurs minimales de  $v_a$  et  $\beta$  pour lesquelles on a un effet superluminaire.
- 4) Calculer  $v_a$  pour  $\beta = 0.9$

Quelle est la source d'énergie de ces noyaux actifs de galaxies ?

L'énergie rayonnée dans le visible peut aller jusqu'à  $10^{11} L_{\odot}$  . On sait, grâce à leur

variabilité que ces sources d'énergie sont contenues dans des volumes très petits : quelques jours à quelques mois lumière de rayon. Si la puissance dégagée provenait d'étoiles, elles formeraient un amas extrêmement dense et on peut calculer qu'il évoluerait rapidement "par évaporation" des étoiles rapides et formation d'un trou noir central supermassif ( $10^7$  à  $10^8$  masses solaires pour les Seyferts,  $10^9$  à  $10^{10}$  masses solaires pour les quasars).

L'accrétion de matière par un tel trou noir peut être un moyen très efficace de transformer la matière en rayonnement : 70 % de rendement environ comparé à 15 % pour la fusion de l'hydrogène dans les étoiles.

On a maintenant des indications très nettes que les galaxies "normales" telles que la nôtre ou M31 (Andromède) ont aussi un trou noir supermassif central. Celui-ci n'étant plus "alimenté" en matière, rayonne très peu. On reviendra sur la physique de ces objets après avoir abordé la relativité générale.

## 5. Structure à grande échelle

Sites web à explorer :

IMAGES HUBBLE <http://www.stsci.edu/>

IMAGES HDF sud <http://www.stsci.edu/ftp/science/hdf/hdfsouth/hdfs.html>

### 5.1 Amas de galaxies

Les galaxies se regroupant en amas, par exemple l'amas local contenant notre galaxie et une quinzaine d'autres dont M31. On a de nouveau le problème de la masse manquante quand on compare la masse d'un amas de galaxies à la somme des masses des galaxies visibles dans l'amas :

Objet rapport Masse / Luminosité

Amas de galaxies : 100 à 200.

La distance moyenne entre galaxies dans un amas est de l'ordre de 20 fois leur diamètre ; la probabilité qu'une collision ou une rencontre proche ait lieu n'est pas négligeable. On observe en effet une douzaine galaxies en interaction gravitationnelle proche parmi les 4000 du catalogue NGC.

Lors d'une collision entre deux galaxies, les gaz subissent une forte compression et un fort taux de formation stellaire. Ils disparaissent dans ce processus. Les étoiles des deux galaxies se mélangent. L'énergie cinétique ne peut pas être dissipée microscopiquement comme dans un choc inélastique. Elle se retrouve sous forme d'énergie orbitale des étoiles : la structure en disque disparaît pour laisser place à des orbites aléatoires (augmentation de l'entropie) et au bout de  $10^8$  ans environ la nouvelle galaxie formée des deux précédentes prend une forme elliptique.

Sur l'ensemble du catalogue NGC, 0.3 % des galaxies sont en collision. Si la probabilité de collision est restée constante depuis la naissance de l'univers il y a  $15 \cdot 10^9$  ans, environ 15 % des galaxies doivent avoir subi des collisions. La proportion observée de galaxies elliptiques est de 20 à 30 %. On pourrait expliquer leur origine par la collision de galaxies spirales.

Le regroupement en amas de fait à plusieurs échelles :

15 galaxies dans un rayon de 0.7 Mpc (amas local)

10<sup>4</sup> galaxies dans un rayon de 3 Mpc (amas denses)

100 amas dans un rayon de 30 Mpc.

<u>Exemple d'amas :</u>	<u>nb. de galaxies</u>	<u>distance</u>
Virgo 10 3	16 Mpc	
Coma 10 4	100 Mpc	

La probabilité de collision entre galaxies dans un amas est non négligeable : la distance moyenne entre galaxies étant de l'ordre de 20 fois leur diamètre. La durée du processus de collision est évaluée à  $3 \cdot 10^8$  ans par des modèles numériques. L'issue est la disparition du gaz, comprimé et transformé en étoiles ou chauffé par l'énergie de collision et diffusé dans l'espace, et la disparition de la structure spirale : les orbites d'étoiles deviennent quasi-aléatoires. On observe une émission X provenant de gaz diffus très chauds dans les amas. Ces gaz peuvent provenir de galaxies entrées en collision. Les amas de galaxies sont les structures les plus grandes qui peuvent être liées par la gravitation. Pour des volumes plus grands, l'expansion fait que les vitesses au bords sont supérieures à la vitesse de libération.

## 5.2 Sursauts Gamma

L'observation des Gamma d'origine cosmique nécessite de sortir de l'atmosphère, qui les absorbe. Les premiers satellites gamma ont observé des sources continues (résidus de supernovas, galaxies actives) et des émissions très intenses mais de très courte durée, et jamais au même endroit. Ce sont les sursauts Gamma.

## 5.3 Bulles cosmiques

L'univers est-il isotrope à très grande échelle ? En traçant un diagramme 3D des galaxies et amas observés jusqu'à 600 Mpc il semble que ce n'est pas le cas : on trouve une répartition des amas le long de filaments et sur la surface de "bulles" à l'échelle de la centaine de Mpc. Une structure très marquée visible sur plus de  $180^\circ$  a été baptisée "Le grand mur". L'isotropie réapparaît à plus grande échelle encore mais on dispose de peu d'observations directes. A l'échelle du Gpc on pourrait considérer l'univers comme une sorte de mousse dont les parois des bulles seraient formées d'amas de galaxies, et le creux de bulles des immenses zones vides.

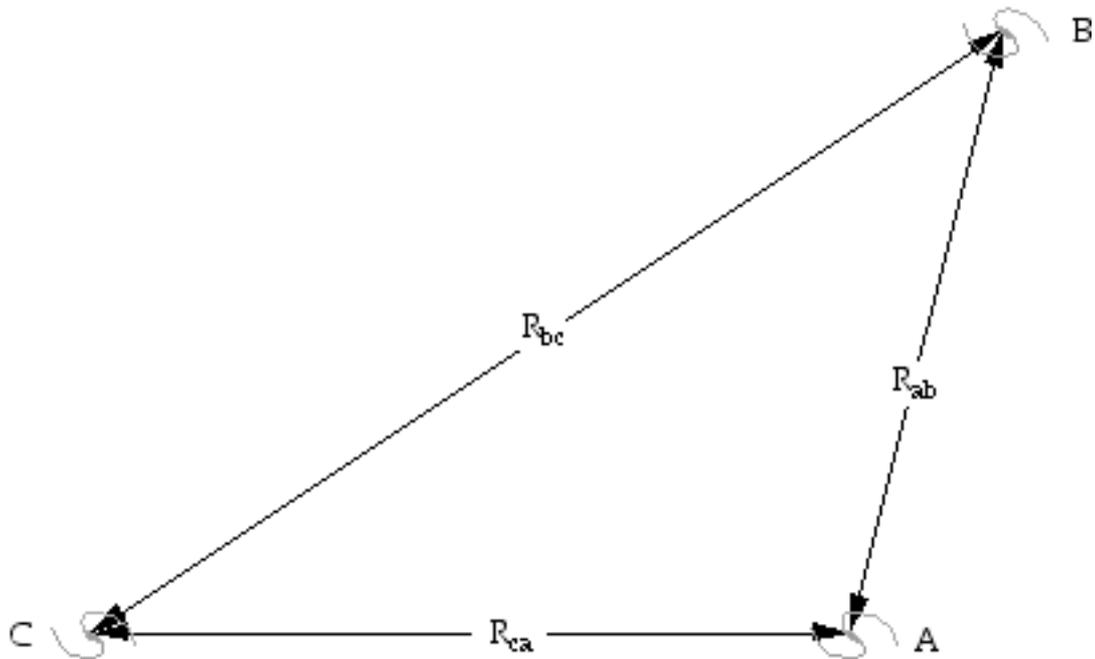
# 6. Isotrope ou Anisotrope

## 6.1 Expansion isotrope.

Depuis la terre, on observe que les galaxies et amas lointains s'éloignent de nous à une vitesse proportionnelle à leur distance (loi de Hubble)

$$d = v / H_0 \quad \text{avec } H_0 = 70 \pm 25 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$$

Cette propriété est-elle spécifique à notre position dans l'univers ? Il est facile de démontrer le contraire. Prenons trois galaxies A, B et C et des observateurs sur chacune.



Si nous sommes en A nous observons :

$$V_{ab} = H_0 R_{ab} \quad \text{et} \quad V_{ac} = H_0 R_{ac}$$

V et R sont des vecteurs, on a donc :

$$R_{bc} = R_{ac} - R_{ab} \quad \text{et} \quad V_{bc} = V_{ac} - V_{ab}$$

$$\Rightarrow V_{bc} = H_0 R_{bc}$$

L'observateur sur la galaxie B verra exactement la même loi d'expansion que nous (quelle soit la direction pointée). Ceci est valable quel que soit B, donc l'expansion observée depuis la terre reste la même quel que soit le point de l'univers d'où on l'observe. Elle n'est pas spécifique à un point donné mais isotrope.

### exercice 6.1 : Tout fout l'camp...

Si l'on appliquait la loi de Hubble :  $v = H_0 d$  sans limite de distance, Pour quelle distance arriverait-on à la vitesse de la lumière ?

On rappelle :  $H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$

Que vaudrait le décalage spectral  $z$  d'un objet à cette distance ?

A quoi correspondrait cette distance ?

## 6.2 Expansion et Gravitation

La gravitation agit à long terme sur l'expansion. Dans un univers infini et isotrope à grande échelle on suppose que la densité est uniforme (à partir d'une certaine échelle).

Prenons une sphère de rayon  $r$  et de densité  $\rho_{m_0}$ , sa masse s'exprime :

$$M = \rho_{m_0} 4\pi r^3 / 3 \quad (6.2-1)$$

Toutes les galaxies à l'intérieur de cette sphère suivent le mouvement d'expansion. la masse totale  $M$  contenue dans la sphère ne change pas avec l'expansion mais son rayon croît. L'énergie totale d'une galaxie de masse  $m$  à la surface de cette sphère sera la somme des énergies cinétiques et potentielles :

$$E = 1/2 mv^2 - GMm r^{-1} \quad (6.2-2)$$

Si la vitesse  $v$  de la galaxie par rapport au centre de la sphère est due à l'expansion de l'univers :

$$v = H_0 r \quad \Rightarrow$$

$$E = (1/2) m H_0^2 r^2 - G \rho_{m0} (4/3) \pi r^3 m r^{-1} \quad (6.2-3)$$

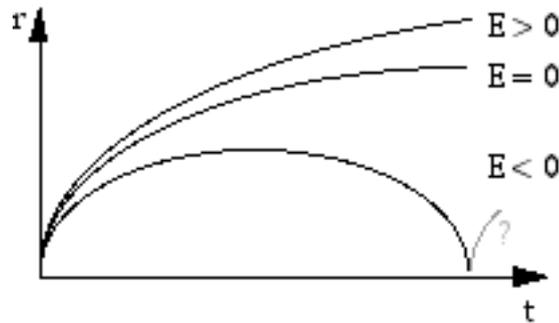
$$E = r^2 m \left[ (1/2) H_0^2 - (4/3) \pi G \rho_{m0} \right] \quad (6.2-4)$$

Une énergie totale positive correspond à une vitesse de la galaxie supérieure à la vitesse de libération, elle n'est pas liée gravitationnellement à la masse M et l'expansion continuera indéfiniment. Une énergie négative limitera l'expansion à un rayon maximum, puis la transformera en contraction. On peut aussi mettre l'équation (5.2-4) sous la forme :

$$6 E / (r^2 m) = 3 H_0^2 - 8 \pi G \rho_{m0} \quad (6.2-5)$$

L'inéquation  $E > 0$  donnera une contrainte sur la densité  $\rho_{m0}$  :

$$E > 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_{m0} < 3 H_0^2 / 8 \pi G$$



Évolution du rayon d'une sphère prise dans un univers en expansion

### exercice 6.2 : Densité de l'univers

Comparer la densité moyenne observée localement avec  $3 H_0^2 / 8 \pi G$ , la valeur limite donnant  $E = 0$ .

Pour l'amas local la masse totale des étoiles et nuages de gaz détectés optiquement correspond à  $6 \cdot 10^{11}$  masses solaires. Pour simplifier on prend comme volume celui d'un cube de 5 Mpc de côté.

$$H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$$

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11}$$

$$\text{Masse solaire} = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

Comme la vitesse de récession des galaxies est modifiée dans le temps par la gravitation, la loi de Hubble s'écrit :

$$v(t) = H(t) r(t)$$

On appelle  $H_0$  la valeur présente de  $H(t)$ . Par convention, on donne l'indice 0 aux valeurs correspondant au présent :  $\rho_0$  pour la densité actuelle de l'univers,  $t_0$  pour l'âge de l'univers, etc.

### exercice 6.3 : Âge de l'univers

1) On appelle  $\Omega$  le rapport des densités  $\rho / \rho_{\text{limite}}$ . Calculer pour  $\Omega = 1$  la fonction  $r(t)$  donnant le rayon d'un volume donné d'un univers en expansion.

2) Calculer le temps  $t_0$  écoulé depuis l'origine pour une valeur donnée de  $H_0$ .

On peut calculer les solutions de l'équation du mouvement pour  $E \neq 0$ , il faut résoudre l'équation :

$$E = mv^2/2 - GMm/r \quad (6.2-6)$$

On exprime d'abord l'énergie totale  $E_0$  au temps  $t_0$  (présent) :

En remplaçant  $M$  par  $\rho_0 v_0 = 4\pi \rho_0 r_0^3 / 3$  et la vitesse  $v$  par  $H_0 r_0$  on a :

$$E_0 = m H_0^2 r_0^2 / 2 - 4\pi G \rho_0 r_0^2 m / 3$$

$$E_0 = r_0^2 m (H_0^2 / 2 - 4\pi G \rho_0 / 3)$$

On exprime  $\rho_0$  en fonction du rapport "densité / densité limite" :

$$\Omega_0 = \rho_0 / \rho_{lim}$$

$$\rho_0 = 3 \Omega_0 H_0^2 / 8\pi G \Rightarrow E_0 = r_0^2 m (H_0^2 / 2 - \Omega_0 H_0^2 / 2)$$

$$E_0 = r_0^2 H_0^2 m (1 - \Omega_0) / 2 \quad (5.2-7)$$

On exprime ensuite l'énergie totale  $E$  pour un temps  $t$  quelconque, en partant toujours de l'équation (5.2-6) :

$$E = m [ (dr/dt)^2 - 2 GM/r ] / 2$$

La masse totale  $M$  est ne varie pas au cours du temps, on peut l'exprimer par  $\rho_0 v_0 = 4\pi \rho_0 r_0^3 / 3$  comme précédemment :

$$E = m [ (dr/dt)^2 - 8\pi G \rho_0 r_0^3 / 3r ] / 2$$

$$E = m [ (dr/dt)^2 - \Omega_0 H_0^2 r_0^3 / r ] / 2$$

On prend les variables sans dimension :

$$D^* \equiv r / r_0 \quad \text{et} \quad \tau^* \equiv H_0 t$$

$$E = m [ r_0^2 H_0^2 (dD^*/d\tau^*)^2 - \Omega_0 H_0^2 r_0^2 / D^* ] / 2$$

$$E = m r_0^2 H_0^2 [ (dD^*/d\tau^*)^2 - \Omega_0 / D^* ] / 2 \quad (5.2-8)$$

Sachant que l'énergie est constante, on égalise (5.2-7) et (5.2-8) et l'équation à résoudre devient :

$$(dD^*/d\tau^*)^2 - \Omega_0 / D^* = 1 - \Omega_0 \quad (5.2-9)$$

On fait les changements de variables suivants :

$$\xi \equiv D^* |1 - \Omega_0| / \Omega_0$$

$$\tau \equiv \tau^* |1 - \Omega_0|^{3/2} / \Omega_0$$

Et l'équation devient :

$$|1 - \Omega_0| (d\xi/d\tau)^2 - |1 - \Omega_0| / \xi = 1 - \Omega_0$$

Si  $\Omega_0 > 1$  (densité supérieure à la densité critique) on a :

$$(d\xi/d\tau)^2 - 1/\xi = -1$$

Et si  $\Omega_0 < 1$  (densité inférieure à la densité critique) on a :

$$(d\xi/d\tau)^2 - 1/\xi = +1$$

Le cas où  $\Omega_0 = 1$  avait été résolu dans un exercice précédent.

En séparant  $d\xi$  et  $d\tau$  on obtient :

$$d\tau = d\xi [ (\xi / 1 \pm \xi) ]^{1/2}$$

$$\tau = \int [ (\xi / 1 \pm \xi) ]^{1/2} d\xi \quad \text{Les conditions aux limites sont } \xi = 0 \text{ pour } \tau = 0.$$

On fait les changements de variables suivants :

$$\xi = \sin^2 \eta / 2$$

pour le cas où  $\Omega_0 > 1$  car l'expansion sera limitée et  $\xi \leq 1$

$$\xi = \text{sh}^2 \eta / 2$$

pour le cas où  $\Omega_0 < 1$  car l'expansion sera illimitée.

On a pour le cas  $\Omega_0 > 1$  :

$$d\xi = d(\sin^2 \eta / 2) = d(1 - \cos \eta) / 2 = (1/2) \sin \eta d\eta$$

$$\tau = (1/2) \int [ (\sin^2 \eta / 2 / 1 - \sin^2 \eta / 2) ]^{1/2} \sin \eta d\eta$$

$$= (1/2) \int [ (1 - \cos \eta) / (1 + \cos \eta) ]^{1/2} \sin \eta d\eta$$

$$= (1/2) \int [ \sin^2 \eta (1 - \cos \eta) / (1 + \cos \eta) ]^{1/2} d\eta$$

$$= (1/2) \int [ \sin^2 \eta (1 - \cos \eta)^2 / (1 - \cos^2 \eta) ]^{1/2} d\eta$$

$$= (1/2) \int [ (1 - \cos \eta)^2 ]^{1/2} d\eta$$

$$= \int d\eta / 2 - \int \cos \eta d\eta / 2$$

On a donc une solution paramétrique pour  $\Omega_0 > 1$  :

$$\xi = (1 - \cos \eta) / 2$$

et

$$\tau = (\eta - \sin \eta) / 2$$

C'est une cycloïde : la courbe que parcourt un point à la périphérie d'une roue qui avance sur une route. Par un calcul similaire dans le cas où  $\Omega_0 < 1$ , on a :

$$\xi = (\text{ch } \eta - 1) / 2 \quad \text{et} \quad \tau = (\text{sh } \eta - \eta) / 2$$

**exercice :** Quel est le rayon maximum atteint dans le cas où  $\Omega_0 > 1$  ?

(1 -  $\Omega_0$ ) /  $\Omega_0$  : réponse

### 6.3 Le rayonnement cosmologique fossile.

La galaxie la plus lointaine dont on a pu mesurer le spectre est à  $z = 5,3$ . Détecte-t-on des objets plus lointains encore ? Oui : un objet particulier à  $z = 1000$  ! C'est le rayonnement cosmologique fossile ; il présente un spectre de corps noir à 2,7 K.

Le rayonnement cosmologique est loin d'être un objet ponctuel : il occupe tout le ciel, sur  $4\pi$  stéradians : il est quasi isotrope. L'existence de ce rayonnement a été prédite par Gamow en 1948 et par Dicke dans les années 1965 puis détectée par hasard par Arno Penzias et Robert Willson. Son origine est une zone d'hydrogène à haute température (2700 K) qui émet un rayonnement de corps noir dont l'intensité en fonction de la fréquence et de la température s'écrit :

$$I(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}$$

$\nu$  est la fréquence,  $h$  : constante de Planck,  
 $T$  est la température,  $c$  : vitesse de la lumière,  
 $k$  : constante de Boltzmann

Si l'on décale un spectre de corps noir par effet Doppler, cela revient à appliquer une affinité sur l'axe des longueurs d'onde. Dans ce qui suit, conformément à la convention en cosmologie, l'indice  $o$  correspond à ce qui est observé à l'instant présent, Le décalage spectral change une fréquence  $\nu$  à l'émission en  $\nu_o$  à la réception. Avec cette convention le décalage spectral  $Z$  est défini par :

$$Z \equiv (\lambda_o / \lambda) - 1 = (\nu / \nu_o) - 1 \Rightarrow \nu_o = \nu / (Z+1)$$

On observe depuis la terre un spectre de corps noir à une température apparente  $T_o$  :

$$I_{\text{reçu}}(\nu_o, T_o) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu_o^3}{\exp\left(\frac{h\nu_o}{kT_o}\right) - 1}$$

Exprimé en fonction de la fréquence d'origine  $\nu$  ce spectre devient :

$$I_{\text{reçu}}(\nu, T) = \frac{1}{(Z+1)^3} \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} = \frac{1}{(Z+1)^3} I_{\text{émis}}(\nu, T)$$

Le corps noir observé à 2.7 K correspond à une température à l'émission de 2700 K s'il est à une distance  $Z = 1000$ . Cela signifie-t-il que nous sommes entourés d'une gigantesque bulle à 2700 K ? Pas exactement. Ce que nous observons se situe dans le passé.  $Z$  correspond à une distance, à un changement de température, mais aussi à un changement d'âge et de rayon de l'univers.

$$1 + Z = \nu / \nu_o = T / T_o = r_o / r$$

$T_o$  et  $r_o$  sont respectivement la température et le rayon de courbure de l'univers pour l'instant présent.

Si  $t$  est l'instant où un objet de température  $T$  a émis le rayon lumineux de fréquence  $\nu$ , que nous observons maintenant au temps  $t_o$  à la fréquence  $\nu_o$ ,  $r$  est le rayon de courbure de l'univers à l'instant  $t$ .

Le changement de température dû à  $Z$  va plus loin qu'un simple facteur d'échelle sur le

spectre de Planck : on peut le considérer comme un effet de détente adiabatique de l'univers, causé par son expansion. A l'époque de l'émission du 3K l'univers était de petit rayon de courbure et la matière qu'il contient était "comprimée". Par son expansion le contenu de l'univers s'est refroidi depuis, de même qu'un gaz se refroidit lorsqu'il se détend. Sa température actuelle est donc environ un millième de celle qu'il avait à  $z = 1000$ .

L'hydrogène s'ionise et devient opaque aux photons s'il est à une température  $T > 2700$  K. Pour  $z > 1000$ , l'hydrogène, constituant principal de l'univers à cette époque, est à une température supérieure à 2700 K et nous cache tout objet plus lointain (plus ancien). De même, à cause de l'ionisation de l'hydrogène qui la constitue nous ne voyons que la photosphère et pas l'intérieur des étoiles.

L'analogie entre l'univers jeune et l'intérieur d'une étoile va plus loin qu'un simple effet sur le libre parcours moyen des photons. A des temps plus anciens, pour des rayons de l'univers encore mille fois plus petits ( $Z=106$ ), le gaz primordial atteignait des températures suffisantes pour donner lieu à des réactions de nucléosynthèse. Une partie de l'hydrogène primordial s'est transformé en hélium : de l'ordre de 15%. Le processus s'est arrêté car le milieu s'est refroidi à cause de l'expansion. Une expansion moins rapide aurait fait disparaître tout l'hydrogène primordial et le devenir de l'univers en aurait été bouleversé : plus d'étoiles...

De la proportion d'hélium dans le mélange primordial H-He, on peut déduire la durée de la phase de nucléosynthèse "primordiale", vite arrêtée par le refroidissement dû à l'expansion, et donc le taux d'expansion à cette époque. On estime proportion d'hélium dans le mélange primordial à partir des nuages de gaz n'ayant pas encore été contaminés par des éléments venant de la nucléosynthèse stellaire. C'est une mesure difficile.

Peut-on détecter des objets à  $z > 1000$  ? On le pourrait avec un rayonnement pour qui le milieu de cette époque serait transparent : les neutrinos ou bien les ondes gravitationnelles par exemple. Pour le moment on en est loin : on arrive juste à détecter les neutrinos du coeur du soleil. On ne dispose pas encore (1998) de détecteur direct d'ondes gravitationnelles.

Le satellite COBE a mesuré de très légères (10- 5) anisotropies du 3K à l'échelle de  $10^\circ$  d'angle et confirmé une dissymétrie globale due au mouvement relatif de la terre (et du soleil, et de la galaxie) à 600 km/s par rapport au référentiel du 3K.

Page web de Laurent Koechlin ou vous pourrez trouver quelques polys et corrigés :

<http://www.obs-mip.fr/omp/umr5572/people/koechlin/>

Attention, pour le moment les polys sur ma page web sont en PostScript, pas en HTML, c'est à dire qu'ils sont récupérables et imprimables sur une imprimante laser, mais on ne peut les afficher à l'écran qu'avec un utilitaire du genre GhostScript.

## 7. Gravitation

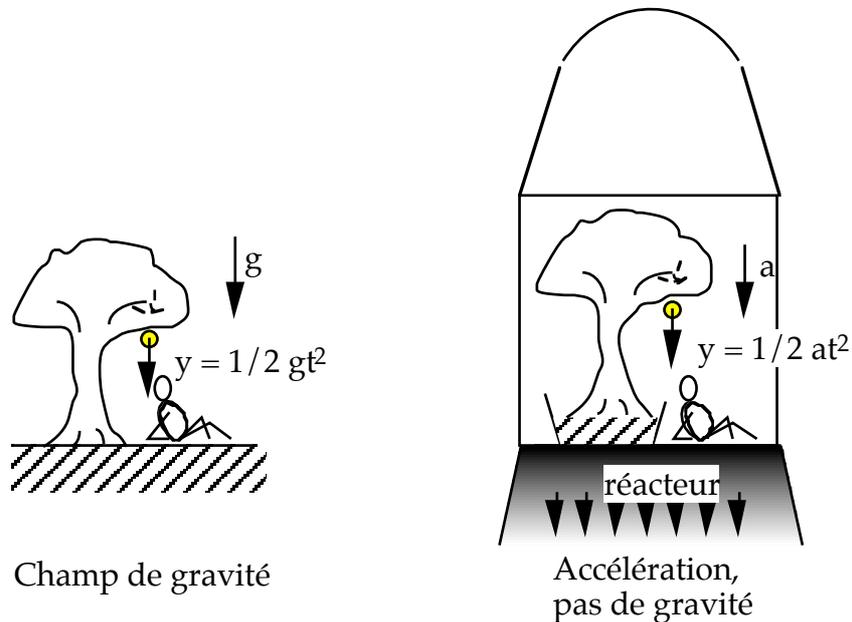
### 7.1 Approche intuitive de la relativité générale

Après avoir exploré le contenu de l'univers, nous allons nous intéresser au contenant pour tenter d'expliquer certaines de ses propriétés. La gravitation est l'interaction principale aux très grandes échelles. Elle est décrite par la relativité générale, extension de la relativité

restreinte aux référentiels en accélération dont les deux principes de base sont :

a) Localement, en l'absence d'accélération ou de champ de gravitation la relativité restreinte s'applique.

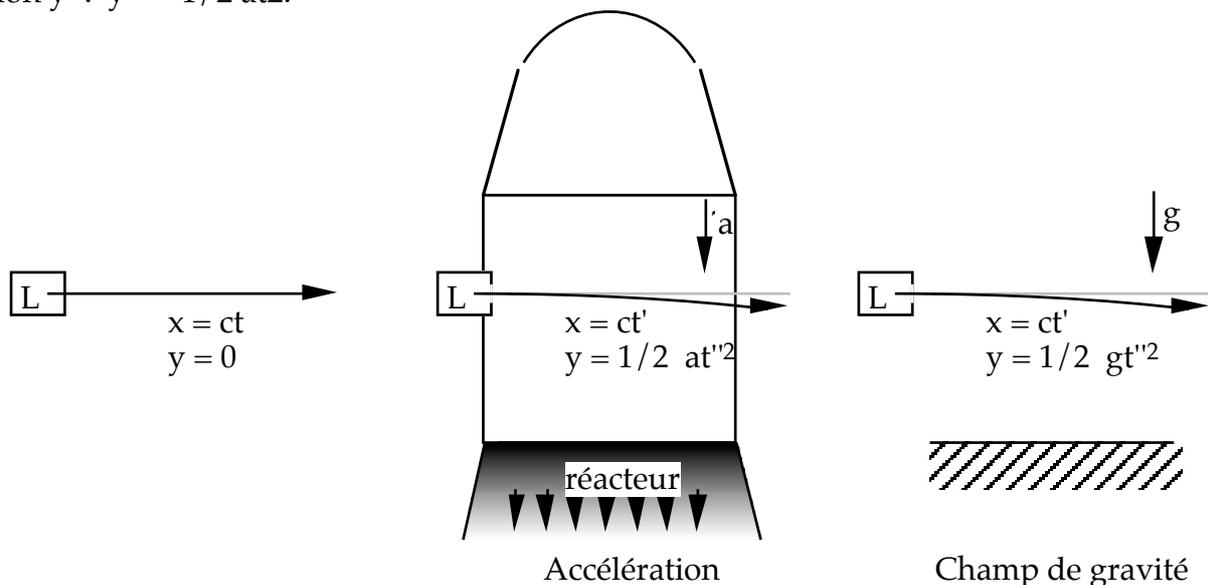
b) Principe d'équivalence : il n'y a pas de différence (localement) entre une accélération et un champ de gravité : masse inerte = masse grave.



Dans un référentiel en accélération et hors de tout champ de gravité (dessin de gauche) le mouvement de la pomme est accéléré et suit les mêmes lois que dans un champ de gravité (dessin de droite).

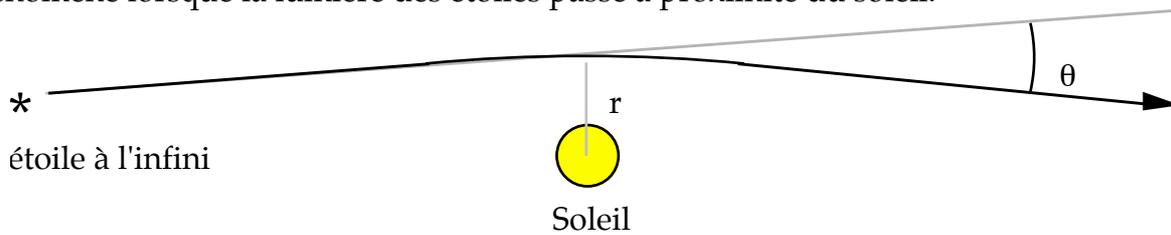
L'identité entre gravité et accélération concerne aussi le mouvement de la lumière : La lumière se propage en ligne droite. Ce mouvement est rectiligne dans un référentiel  $(x, y, t)$  non accéléré (Galiléen), mais vu d'un référentiel accéléré  $(x', y', t')$  il n'est plus rectiligne.

En effet un photon met un temps  $t$  fini pour parcourir une distance  $x$  donnée ( $t = x/c$ ) et pendant ce temps l'origine du référentiel accéléré s'est déplacée dans une direction  $y$  de  $y = 1/2 at^2$ . Mesuré dans le référentiel en accélération le photon a parcouru une distance selon  $y'$  :  $y' = -1/2 at^2$ .



## 7.2 action des masses sur la lumière.

Un champ de gravité étant équivalent localement à une accélération, il a d'après la théorie de la relativité générale le même effet de courbure sur la lumière. On observe en effet ce phénomène lorsque la lumière des étoiles passe à proximité du soleil.



Pour un observateur à grande distance, le champ de gravité associé à la masse  $M$  du soleil a modifié la direction du rayon lumineux d'un angle :

$$\theta = 4GM/rc^2$$

$G$  est la constante de la gravitation,  $M$  est la masse créant le champ de gravité.  $r$  est la distance minimale au centre de la masse,  $c$  est la vitesse de la lumière.

**exercice :** Lorsque la lumière des étoiles passe à proximité du soleil, les voit-on plus près du soleil ou plus écartées de celui-ci ?

Réponse : Plus écartées

### 7.3 Lentilles gravitationnelles et arcs cosmiques

Toute masse dévie les rayons lumineux et agit comme une "lentille gravitationnelle". Si des conditions d'alignement sont présentes, il peut y avoir formation d'images, mais celles-ci ne sont pas stigmatiques : elles ont généralement une forme en arc de cercle. On observe des images gravitationnelles de galaxies et quasars lointains formées par la masse de galaxies ou d'amas plus proches sur la ligne de visée.

### 7.4 Courbure de l'espace

La lumière suit le plus court chemin d'un point à un autre. Ceci reste vrai même si son trajet est courbe. Si dans un espace donné le plus court chemin d'un point à un autre est une courbe, c'est que cet espace lui-même est courbe. La présence de masse courbe donc l'espace.

On peut facilement se représenter un espace à deux dimensions courbes (de courbure positive) sous la forme de la surface d'une sphère. On fait mentalement une opération de "plongement" de cet espace à deux dimensions courbes dans un espace Euclidien à trois dimensions. On peut se représenter de la même façon un espace à deux dimensions de courbure négative sous la forme d'une selle de cheval ou du terrain entourant un col en montagne. Le plus court chemin d'un point à un autre en restant sur ces surfaces est une courbe appelée géodésique. Par exemple sur la surface de la terre c'est un arc de grand cercle.

Notre espace n'est pas à deux mais à trois dimensions, courbées localement et globalement par la masse qu'il contient. Pour se le représenter il faudrait le plonger dans un espace Euclidien à quatre dimension (à 5 si l'on rajoute le temps). S'il était l'analogue à trois dimensions de la surface d'une sphère ce serait une 4-sphère. Le centre d'une 4-sphère n'est pas un point de cet espace, de même que le centre d'une 3-sphère (sphère normale) n'appartient pas à sa surface.

Périmètre d'un cercle :

- dans un espace à courbure positive :  $l < 2\pi r$
- dans un espace Euclidien :  $l = 2\pi r$
- dans un espace à courbure négative :  $l > 2\pi r$

La courbure de notre espace dépend de son énergie totale, donc du rapport densité sur densité limite :  $\Omega_0 \equiv \rho_0 / \rho_{lim}$

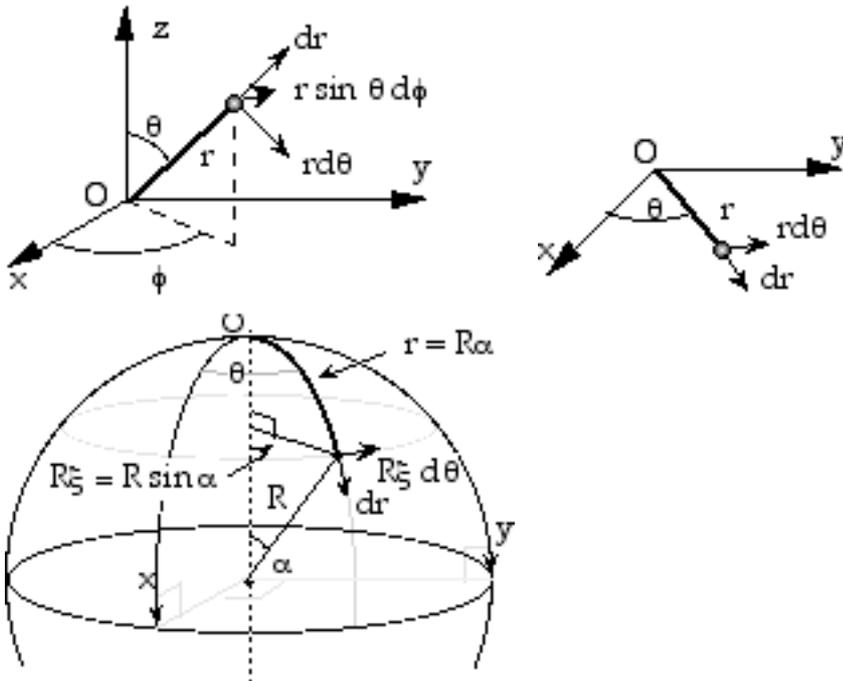
Si  $\Omega_0 > 1$  l'espace est courbé positivement et de volume fini  
 Si  $\Omega_0 < 1$  l'espace est courbé négativement et de volume infini  
 6,4,1 Métrique de Friedmann-Robertson-Walker

C'est une des métriques utilisées en cosmologie. On appelle métrique un élément de longueur qui reste de même valeur quelle que soit l'orientation du repère dans lequel on la représente. Dans un espace Euclidien c'est :

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (7.4-1)$$

Voici la même métrique exprimée en coordonnées polaires :

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (7.4-2)$$



rappel :

$$\begin{aligned} r^2 &\equiv x^2 + y^2 + z^2 \\ \tan \phi &\equiv y / x \\ \tan \theta &\equiv (x^2 + y^2) / z \end{aligned}$$

Pour passer d'une métrique dans un espace plan à celle d'un espace courbe, commençons par deux dimensions. Pour un repère d'origine O dans le plan :

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 \quad (7.4-3)$$

Pour un repère d'origine O dans un espace à deux dimensions de courbure positive (la surface d'une sphère), on peut exprimer r en fonction du rayon de courbure R de cet espace, et de l'angle  $\alpha$  au centre tel que  $r = R\alpha$  (voir dessin). La métrique devient :

$$dl^2 = R^2 d\alpha^2 + R^2 \sin^2 \alpha d\theta^2$$

Dans cet espace, c'est la corde  $R \sin \alpha$  et non la longueur de l'arc  $R\alpha$  qui entre en jeu pour le terme orthogonal à  $dr$  dans l'expression de la métrique.

En définissant  $\xi \equiv \sin \alpha$ , la métrique devient :  $dl^2 = R^2 (d\alpha^2 + \xi^2 d\theta^2)$

On peut exprimer  $d\alpha^2$  en fonction de  $d\xi^2$  en utilisant les relations :

$$\begin{aligned} \xi &\equiv \sin \alpha \Rightarrow d\xi = \cos \alpha d\alpha \\ d\alpha^2 &= d\xi^2 / \cos^2 \alpha \Rightarrow d\alpha^2 = d\xi^2 / (1 - \xi^2) \quad \text{et l'on a finalement :} \end{aligned}$$

$$dl^2 = R^2 (d\xi^2 / (1 - \xi^2) + \xi^2 d\theta^2) \quad (7.4-4)$$

Passons maintenant à un espace à trois dimensions courbes. On ne peut plus le

représenter facilement par un graphique, mais on peut exprimer sa métrique en ajoutant un terme orthogonal aux deux autres, par une expression semblable à celle de la métrique d'un espace 3-D Euclidien (6.4-2) :

$$dl^2 = R^2 (d\xi^2 / (1 - \xi^2) + \xi^2 d\theta^2 + \xi^2 \sin^2\theta d\phi^2) \quad (7.4-5)$$

Dans un espace à courbure quelconque, le coefficient  $\alpha$  des termes orthogonaux à  $dr$  doit être remplacé par  $\xi$  où :

$$\xi = \sin \alpha \quad (\text{courbure} > 0)$$

$$\xi = \alpha \quad (\text{courbure} = 0)$$

$$\xi = \text{sh } \alpha \quad (\text{courbure} < 0)$$

L'expression de la métrique devient :

$$dl^2 = R^2 (d\xi^2 / (1 - k\xi^2) + \xi^2 d\theta^2 + \xi^2 \sin^2\theta d\phi^2) \quad (7.4-6)$$

avec  $k$  valant respectivement 1, 0, ou -1 selon que la courbure est positive, nulle ou négative. Si l'on rajoute le temps, on a :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2$$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2 (d\xi^2 / (1 - k\xi^2) + \xi^2 d\theta^2 + \xi^2 \sin^2\theta d\phi^2) \quad (7.4-7)$$

C'est la métrique de Friedmann-Robertson-Walker.

#### **exercice 7.0 :** *La souplesse en 4-D*

- 1) calculer la circonférence d'un cercle dans un espace 2-D à courbure positive uniforme.
- 2) calculer la surface d'une 3-sphère dans un espace 3-D à courbure positive uniforme.
- 2) calculer le volume de la "peau" à 3-D d'une 4-sphère à courbure positive uniforme.

### 7.5 Expansion d'un espace courbe

On peut maintenant se représenter l'expansion de l'univers, non pas comme l'augmentation de rayon d'une 3-sphère englobant un certain volume, mais comme l'augmentation du rayon d'une 4-sphère, notre espace étant la "surface" à trois dimensions de cette 4-sphère.

#### **exercice 7.1 :** *Hyper gonflé*

Retrouver la loi de Hubble pour des points fixes dans une 4-sphère dont le rayon  $R(t)$  varie en fonction du temps.

En considérant l'expansion observée de l'univers comme un accroissement de son rayon de courbure et non plus comme un déplacement des objets qu'il contient, on résout un certain nombre de problèmes. Par exemple on avait vu précédemment que la vitesse d'expansion était infinie à l'origine, ce qui n'était pas conforme à la relativité restreinte. Maintenant on voit que le vecteur vitesse d'expansion n'a pas de composante supérieure à  $c$  dans notre espace (elles sont même nulles).

Le même raisonnement tient pour des espaces courbes non clos.

### 7.6 Évolution du rayon en fonction du temps

L'équation qui régit le rayon d'un espace à trois dimensions courbes tel une 4-sphère ressemble à l'expression (5.1), C'est la relation de Fridmann Lemaître :

$$1/R^2 (dR/dt)^2 - 8 \pi G \rho(t)/3 = - R^{-2} c^2 \quad (6.6-1)$$

On peut comparer cette expression à l'équation (5.2-5) de l'approximation Euclidienne qui donnait pour une galaxie de masse  $m$  :

$$H_0^2 - 8 \pi G \rho_{m_0} / 3 = 2 r - 2 E / m$$

dans un espace en expansion courbe de rayon R on peut remplacer  $H_0$  par :

$$H_0 = 1/R (dR/dt) \quad \text{voir l'exercice 6.1 : "Hyper gonflé"}$$

L'équation (5.2-5) deviendrait alors :

$$1/R^2 (dR/dt)^2 - 8 \pi G \rho_{m_0} / 3 = 2 r - 2 E / m$$

On voit que les équations (5.2-5) et (6.6-1) se ressemblent. Seul le second membre diffère. Pour résoudre l'équation (6.6-1), on considère que la masse M contenue dans l'univers est constante donc la densité  $\rho(t)$  varie selon :

$$\rho(t) = M/V(t)$$

Le volume V(t) de l'univers est celui de la 4-sphère, il vaut :

$$V(t) = 2\pi^2 R^3(t)$$

L'équation (6.6-1) devient :

$$(dR/dt)^2 / 2 - 2GM / 3\pi R = c^2 / 2 \quad (6.6-2)$$

Si l'on fait les changements de variables suivants :

$$\xi \equiv R (3\pi c^2 / 4GM)$$

$$\tau \equiv t ((3\pi c^3 / 4GM))$$

On retrouve la même équation que le cas traité précédemment d'un volume borné dans un espace Euclidien :

$$(d\xi/d\tau)^2 - 1/\xi = -1$$

Avec pour solution :

$$\xi = (1 - \cos \eta) / 2 \quad \text{et} \quad \tau = (\eta - \sin \eta) / 2$$

### exercice 7.2

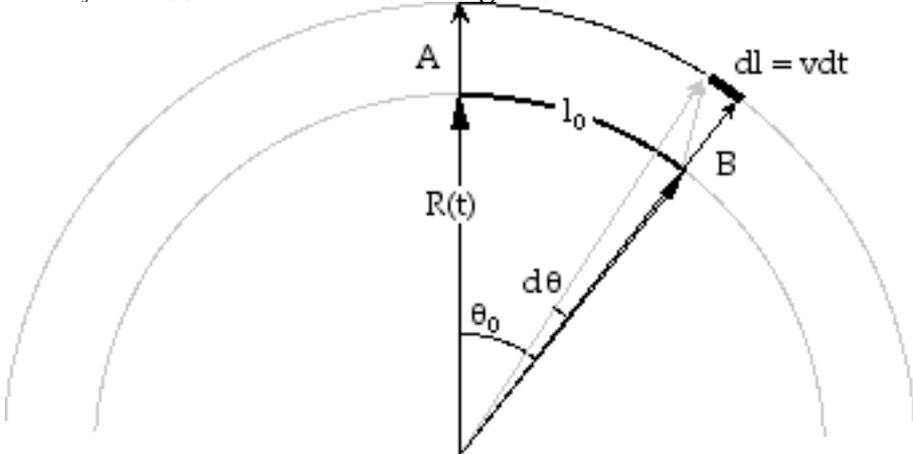
Dans le cas d'une 4-sphère de rayon R croissant à la vitesse  $dR/dt$  et contenant une masse M, quelle valeur maximale atteint son rayon ? Quel est le temps écoulé entre deux instants où  $R = 0$  ? Calculer numériquement pour  $M = 10^{24}$  masses solaires.

### exercice 7.3 *Vaincre l'expansion.*

Imaginez un univers en expansion si rapide que...

Deux personnes sont séparées initialement par une distance  $l_0$ . L'une est immobile en A, l'autre marche à sa rencontre depuis le point B. Elles voudraient se rencontrer en A, mais leur univers étant en expansion, il a tendance à accroître la distance qui les sépare. La personne partie de B pourra-t-elle arriver en A, donc vaincre l'expansion?

Pour résoudre le problème, faites une coupe de l'univers, supposé être la "surface" à trois dimensions courbes d'une 4-sphère, par un plan contenant son centre. On obtient un cercle, espace à une dimension courbe. L'expansion est la conséquence de l'accroissement du rayon R(t) de l'univers (voir figure).



1) Exprimez l'angle  $\theta_0$  (séparation initiale entre A et B) en fonction de R(t) et  $l_0$ .

- 2) On considère que l'expansion de cet univers suit la loi :  $R(t) = at^{2/3}$ , où  $a$  est une constante. Montrez que  $d\theta = v a^{-1} t^{-2/3} dt$ .
- 3) Le départ de B se situe à un temps  $t_0 > 0$  et le déplacement se fait à vitesse  $v$  constante. Exprimez l'angle parcouru  $\theta$  en fonction de  $t$ ,  $t_0$ ,  $a$  et  $v$ .
- 4) Dans cet univers, la personne partie de B arrivera-t-elle en A, et si oui au bout de combien de temps ? Exprimez le résultat en fonction de  $\theta_0$ ,  $t_0$ ,  $a$  et  $v$ .
- 5) On prend maintenant  $v=c$  (cas de la lumière), on se place au temps  $t$ . Quel est l'angle  $\theta$  parcouru par des photons partis de B au temps  $t_0$  si  $t_0 = 0$  ?
- 6) Quelle est la distance  $l$  parcourue par ces mêmes photons au temps  $t$  ?
- 7) Cette distance est la distance maximale jusqu'à laquelle on peut voir dans un univers d'âge  $t$  : l'horizon cosmologique. Pourquoi ne peut-on pas voir plus loin ?
- 8) L'horizon cosmologique se déplace à une vitesse superluminique (donner sa valeur) pour les hypothèses de départ de l'exercice. Cette vitesse entre-t-elle en conflit avec la relativité restreinte ? Expliquez.

## 7.7 Métrique de Schwarzschild

C'est un exemple de métrique dans un espace-temps courbe. Par comparaison, la métrique de Robertson-Walker présentée au chapitre précédent ne prenait pas en compte la courbure du temps.

Pour un espace-temps "Euclidien" on a la métrique de la relativité restreinte :

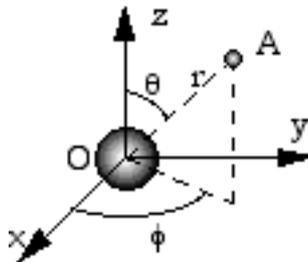
$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Voici cette même métrique exprimée en coordonnées polaires :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2$$

Nous allons maintenant placer une masse en un point de l'espace et étudier ses effets sur la métrique. La présence d'une masse courbe l'espace-temps. L'élément invariant dépend alors de la courbure de cet espace-temps et ne garde pas la même expression que ci-dessus. Dans le cas simple où la masse est à symétrie sphérique, (métrique de Schwarzschild) l'élément invariant s'exprime en coordonnées polaires avec pour origine le centre de la masse :

$$ds^2 = (1 - 2GM/rc^2) c^2 dt^2 - (1 - 2GM/rc^2)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2 .$$



rappel :

$$\begin{aligned} r^2 &\equiv x^2 + y^2 + z^2 \\ \tan \phi &\equiv y / x \\ \tan \theta &\equiv (x^2 + y^2) / z \end{aligned}$$

Si l'on reste dans le plan x, y on a  $\theta = \pi/2$  et la métrique se simplifie :

$$ds^2 = (1 - 2GM/rc^2) c^2 dt^2 - (1 - 2GM/rc^2)^{-1} dr^2 - r^2 d\phi^2.$$

En définissant  $r_0 \equiv GM/c^2$  cela donne :

$$ds^2 = (1 - 2r_0/r) c^2 dt^2 - (1 - 2r_0/r)^{-1} dr^2 - r^2 d\phi^2.$$

La vitesse s'exprime par :

$$\mathbf{v} = ds_r / ds_t \mathbf{e}_r + ds_\phi / ds_t \mathbf{e}_\phi$$

ce qui donne dans cette métrique :

$$\mathbf{v} = -(1 - 2r_0/r)^{-1} (dr/dt) \mathbf{e}_r - r (1 - 2r_0/r)^{-1/2} (d\phi/dt) \mathbf{e}_\phi$$

L'énergie :v

$$E = \gamma m c^2 (1 - 2r_0/r)^{1/2}$$

$$\text{avec } \gamma \equiv (1 - v^2/c^2)^{-1/2}.$$

Le moment cinétique :

$$L = \gamma m r^2 (1 - 2r_0/r)^{-1/2} d\phi/dt.$$

7.7. Mouvement d'une masse dans un champ de gravité :

$$\gamma \equiv (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \Rightarrow v^2 = c^2 (\gamma^2 - 1) \gamma^{-2}$$

En reprenant l'expression de la vitesse il vient :

$$\begin{aligned} c^2 (\gamma^2 - 1) \gamma^{-2} &= (1 - 2r_0/r)^{-2} (dr/dt)^2 - r^2 (1 - 2r_0/r)^{-1} (d\phi/dt)^2 \\ \Rightarrow r^2 (d\phi/dt)^2 &= (1 - 2r_0/r) L^2 / \gamma^2 m^2 r^2. \end{aligned}$$

En définissant  $u \equiv 1/r$  cela donne :

$$r^2 (d\phi/dt)^2 = u^2 (1 - 2ur_0) L^2 / \gamma^2 m^2$$

$$dr/dt = (dr/du) (du/d\phi) (d\phi/dt) = -(du/d\phi) (1 - 2ur_0)^{1/2} L / \gamma m,$$

d'où

$$c^2 (\gamma^2 - 1) \gamma^{-2} = (du/d\phi)^2 (1 - 2ur_0)^{-1} L^2 / \gamma^2 m^2 + U^2 L^2 / \gamma^2 m^2,$$

$$(du/d\phi)^2 + u^2 (1 - 2ur_0) = m^2 c^2 L^{-2} (\gamma^2 - 1) (1 - 2ur_0)$$

$$= m^2 c^2 L^{-2} [(E^2 m^{-2} c^{-4}) - (1 - 2ur_0)].$$

En dérivant par rapport à  $\phi$  on trouve, puisque E est constant :

$$d^2u/d\phi^2 + u^2 (1 - 2ur_0) - r_0 u^2 = m^2 c^2 L^{-2} r_0$$

$$d^2u/d\phi^2 + u = Gm^2 M + 3GMu^2/c^2.$$

C'est l'équation du mouvement classique avec en plus le terme :  $3Gu^2 M/c^2$ .

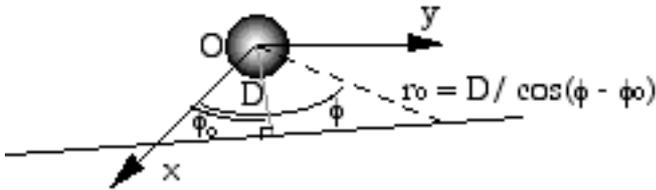
Ce terme est responsable entre autres de l'avance du périhélie de Mercure. On peut aussi appliquer cette équation aux photons en prenant  $m = 0$  :

$$d^2u/d\phi^2 + u = 3GMu^2/c^2. \quad (7.7-1)$$

Dans un champ de gravité pas trop intense, le terme "perturbateur" :  $3 u^2 G M / c^2$  est très petit.

On peut donc remplacer  $u$  dans ce terme par  $u_0$ , solution de  $d^2 u_0 / d\phi^2 + u_0 = 0$ .

On trouve :  $u_0 = \cos(\phi - \phi_0) / \Rightarrow r_0 = D / \cos(\phi - \phi_0)$



Avec  $D = \text{constante}$ , c'est l'équation d'une ligne droite passant à une distance minimale  $D$  de l'origine : trajet rectiligne d'un photon dans une métrique Euclidienne.

L'équation (7.2-1) devient :

$$d^2 u / d\phi^2 + u = 3 \cos^2(\phi - \phi_0) D^{-2} G M c^{-2} . \quad (7.7-2)$$

On définit :

$$U \equiv u - 3/2 D^{-2} G M c^{-2}$$

avec  $\psi \equiv \phi - \phi_0$ .

Cela donne l'équation :

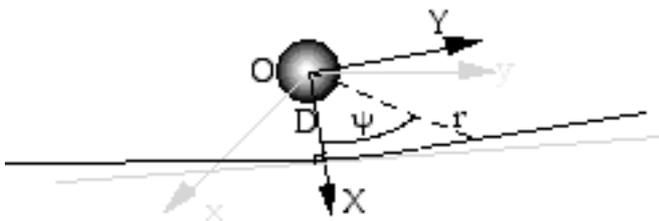
$$d^2 U / d\psi^2 + U = 3/2 \cos^2 \psi , \quad (7.7-3)$$

qui a pour solution :

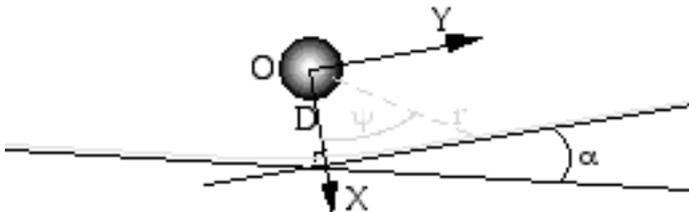
$$U = D^{-1} \cos \psi - D^{-2} G M c^{-2} \cos^2 \psi / 2 ,$$

$$u = D^{-1} \cos \psi + D^{-2} G M c^{-2} (\cos^2 \psi + 2 \sin^2 \psi) .$$

Si l'on passe en coordonnées cartésiennes ( $X = r \cos \psi$  ;  $Y = r \sin \psi$ ) on a :



$$X = D - D^{-1} G M c^{-2} (X^2 + 2 Y^2) / ((X^2 + Y^2)^{1/2} .$$



Si l'on prend  $Y$  très grand devant  $X$  on trouve les asymptotes de la courbe :

$$X = D \pm 2 Y G M / D c^2 ,$$

et l'angle entre les deux asymptotes vaut :

$$\alpha = 4 G M / D c^2 .$$

Confirmations de la relativité générale :

- La mesure d'Eddington en 1919 (déplacement radial apparent de  $1.75''$  des étoiles vues près du bord solaire lors d'une éclipse).
- l'avance du périhélie de Mercure.
- mesures directes des variations de l'écoulement du temps causées par le champ gravitationnel terrestre et solaire.
- observation de l'accélération de la période orbitale du pulsar double PSR 1913+16, qui correspond à une perte d'énergie par émission d'ondes gravitationnelles.

**Exercice 7.4 :** *Images gravitationnelles d'un quasar*

Un quasar à  $z = 0,2$  et une galaxie à  $z = 0,1$  sont sur la même ligne de visée. On voit deux images symétriques du quasar, décalées d'un petit angle  $\theta$  par rapport à l'image de la galaxie déflectrice.



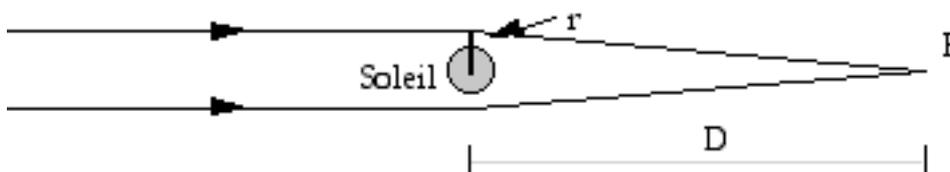
- Donner l'expression puis la valeur des distances du quasar et de la galaxie en question.
- Donner l'expression de la masse de la galaxie (supposée ponctuelle) responsable de la déviation des rayons issus du quasar.
- Donner une valeur numérique de cette masse, sachant que les images du quasar sont à un angle  $\theta = 1''$  de l'image de la galaxie.
- Maintenant, on prend un cas un peu plus général: la galaxie déflectrice et le quasar ne sont pas parfaitement alignés. Les distances sont toujours  $z = 0,2$  pour le quasar et  $0,1$  pour la galaxie.



Donner l'expression de la masse de la galaxie.

**Exercice 7.5 :** *Le Télescope Soleil*

- calculer l'angle de déviation d'un rayon passant à une distance  $r$  minimum de  $1.5$  rayon solaire du centre du soleil.



- Donner en fonction de  $r$ , la distance  $D$  du point  $F$  où des rayons initialement parallèles et passant à une distance  $r$  du soleil se rejoignent (voir schéma). Calculer la valeur de  $D$ , correspondant à  $r = 1.5$  rayon solaire.

- 3) Y a-t-il une valeur minimale et/ou une valeur maximale de  $D$  ? si oui, la ou les donner.  
 4) La "lentille gravitationnelle" formée par le soleil et focalisant les rayons en  $F$  est-elle de bonne qualité optique ? Pourquoi ?

Est - elle achromatique ? (une lentille achromatique garde les mêmes caractéristiques quelle que soit la longueur d'onde pour laquelle on l'emploie).

- 5) Si l'on se plaçait au point  $F$  de convergence, à la distance  $D$  en aval du soleil sur le trajet de la lumière provenant d'une étoile lointaine supposée à l'infini, comment verrait-on cette étoile ?

- 6) Si l'on fait passer un rayon supplémentaire à la distance  $r + dr$  du soleil au lieu de  $r$ , à quelle distance minimale  $dx$  passe-t-il du point  $F$  ?

- 7) Quel décalage  $dr$  peut-on tolérer pour que les rayons tombent dans un cercle de 100 mm de diamètre centré sur le point  $F$  ?

A titre d'information : la diffraction étale le point d'arrivée des rayons en  $F$  sur une tache d'environ 100 mm de diamètre pour la lumière visible. Cela a été calculé en utilisant une ouverture annulaire de 1.5 rayon solaire dans les conditions du problème, on ne vous demande pas de faire ce calcul.

- 8) Quel est le rapport entre la surface d'une tache de rayon  $dx$  autour du point  $F$  et la "surface collectrice" d'où proviennent ces rayons : une couronne de rayon  $r$  et de largeur  $2 dr$  ? Faire un schéma.

- 9) L'énergie étant conservée entre la surface collectrice et la tache focale, quel est le rapport d'amplification de brillance ? Donner une valeur numérique pour  $dx = 50$  mm et  $r = 1.5$  rayon solaire. Cela permettrait-il d'observer des objets faibles ? On suppose que l'on a masqué le soleil par un système type coronographe.

## 7.8 Singularité d'origine (big bang)

A tout rayonnement correspond une densité d'énergie, donc une densité. La densité du rayonnement fossile à 2.7 K présent partout dans l'univers peut-elle représenter une valeur comparable à la densité moyenne de matière (baryonique) ?  
 La densité de ce rayonnement s'exprime par :

$$\rho_{\text{rad}} = \sigma T^4 / c^2 = 6.5 \cdot 10^{-31} \text{ kg m}^{-3}$$

C'est une valeur plus faible que la densité de matière observée.  
 On a vu que la température du rayonnement est fonction de  $z$  :

$$T \propto z$$

et que  $r$  rayon de l'univers est aussi fonction de  $z$  :

$$r \propto z^{-1}$$

On en déduit une relation entre la densité de rayonnement et le rayon de l'univers :

$$\rho_{\text{rad}} \propto R^{-4}$$

La densité de matière est donnée par la formule classique :

$$\rho_m \propto R^{-3} \quad \Rightarrow \quad \rho_{\text{rad}} / \rho_m \propto R^{-1}$$

Quand le rayon de l'univers était petit, la densité de rayonnement était prépondérante.

Pour un rayon de l'univers suffisamment petit, les conditions de température et de pression étaient favorables à la nucléosynthèse. L'expansion a refroidi le milieu et arrêté le processus alors que environ 20% environ des protons avaient été transformés en noyaux d'hélium.

---

Ouvrages ayant servi à la rédaction de ce poly, et lectures conseillées :

Franck H. Shu : "The physical Universe", University science books.

A. Mazure, G. Mathez, Y. Mellier : "Chronique de l'espace temps", Masson.

J.P. Perez, N. Saint Circq-Chéry : "Relativité et quantification", Masson.