Ccorrigé de l'exercice 1.1 : *etrouver l'approximation V = zc pour z<<1*

$\beta << 1 \Rightarrow \quad \gamma \approx 1$ L'effet Doppler longitudinal relativiste s'approxime par :

$\nu = \gamma (1 - \beta) \nu_o$ avec $\beta << 1$ donc $\gamma \approx 1 \Rightarrow \quad \nu \approx (1 - \beta) \nu_o$

$\Rightarrow \quad c/\lambda \approx (1 - \beta) c/\lambda_o$

$\Rightarrow \quad \lambda (1 - \beta) \approx \lambda_o$

$\Rightarrow \quad \lambda \approx (1 + \beta) \lambda_o$ approx faite : $\beta << 1$.

$\Rightarrow \quad \lambda / \lambda_o - 1 \approx \beta$

$\Rightarrow \quad Z \approx V/c$ cqfd.

Ccorrigé de l'exercice 2.1 : *Les étoiles en relief.*

$\mathbf{d} = r / \alpha \quad \Rightarrow \quad \Delta \mathbf{d}/\mathbf{d} = \Delta\alpha / \alpha + \Delta r/r$; $\Delta r/r=0$ car pas d'incertitude sur r.

$\Rightarrow \quad \Delta \mathbf{d}/\mathbf{d} = \mathbf{d}\, \Delta\alpha / r \quad \Rightarrow \quad \mathbf{d} = (\Delta \mathbf{d}/\mathbf{d})\, r / \Delta\alpha$

a) $\mathbf{d} = 0.3\, r / \Delta\alpha \quad \Rightarrow \quad \mathbf{d} = 0{,}3 * 0{,}1 / (4/60)*(\pi/180) = 0{,}03 / (\pi / 2700) \approx 25$ m

On peut voir le relief plus loin (<50m) mais avec moins de précision.

b) $\mathbf{d} = 0.1\, r / \Delta\alpha \quad \Rightarrow \quad \mathbf{d} = 0.1 \times 1 / 10^{-5}$ pc $= 10^{4}$ pc $= 10$ kpc

---

Corrigé de l'exercice 2.2 :*Distances obtenues par calibration de diagrammes HR.*

On utilise la relation: $\Phi(d) / \Phi(d_o) = (d_o / d)^2 \Rightarrow d = d_o [\, \Phi(d_o) / \Phi(d)\,]^{1/2}$

Le diagramme HR de l'amas Praesepe montre qu'une étoile de une luminosité solaire à la distance d de l'amas donne un flux de :

$\Phi(d) = 10^{-16}$ w m^{-2}

Le soleil est à une distance $d_o =$ 1 unité astronomique (UA) et donne un flux :

$\Phi(d_o) = 10^{3}$ w m^{-2}

On a donc $d = 1\, [\, 10^{3} / 10^{-16}\,]^{1/2}$ UA $= (10^{19})^{1/2}$ UA $= 3.1\, 10^{9}$ UA $= 1.5\, 10^{4}$ pc

---

Corrigé du problème 2.3 :*Voir pulser δ Cephée.*

Ce porobleme vient d'une idée assez ancienne mais la manip a été faite pour la première fois au GI2T en aout 1994.

a) Cette étoile pulse. Lorsque les raies sont décalées vers la bleu, sa surface se rapproche de nous : elle enfle.

b) $$V\,max = c\left(\frac{\lambda\,min - \lambda\,moyen}{\lambda\,moyen}\right) = 128 \text{ km/s}$$

c) $V = V_{max} \sin(\omega t)$ avec $\omega = 2\pi / T = 1.356\, 10^{-5}$

d) on obtient le rayon de l'étoile en fonction du temps à une constante près.

e) $d(t) = 2r(t) = 2 \int v(t)\, dt = -2\, (V_{max} / \omega) \cos(\omega t) + Cste$

f) $$d_{max} - d_{min} = 2\frac{V_{max}}{\omega}(\cos 0 - \cos \pi) = 4\, V_{max} / \omega = 3.776\, 10^{10} \text{ m}$$

g) si D est la distance de l'étoile, on a $d = D \tan ø \approx D\, ø \Rightarrow$

$$D = (d_{max} - d_{min}) / (ø_{max} - ø_{min})$$

h) $D = 7.788\, 10^{18}$ m = 252 pc

i) $d_{min} \approx D\, ø_{min} = 4.15 * 10^{10}$ m = 41 millions de km

$d_{max} \approx D\, ø_{max} = 7.93 * 10^{10}$ m = 79 millions de km

j) $\Delta d / d = 2\,\Delta ø / ø = 10^{-4} / 10^{-3} \approx 10\ \%$

Question de point de vue :
Si l'on mettait une céphéïde à la place du soleil, le flux rayonné étant 10^4 fois plus fort en moyemme, la terre serait à une température moyenne 10 fois plus élevée qu'actuellement, soit 3000 K. Elle resterait toutefois en dehors de l'étoile.

Corrigé de l'exercice 2.4 : *Le mange-minutes*

1 pc = $3.09 * 10^{16}$ m
1 Mpc = $3.09 * 10^{22}$ m
$Ho^{-1} = (1/7.5) * 10^{-4} * 3.09\ 10^{22}$ s = $4.12\ 10^{17}$ s
$Ho^{-1} = 4.12\ 10^{17} / 3600 / 24 / 365.25$ ans
$Ho^{-1} = (1.3 \pm 0.45)\ 10^{10}$ ans. Cela correspond à l'âge de l'univers.

Corrigé de l'exercice 2.5 : *Espace courbe*

1) c'est une application numérique de la formule $d = (c / 2Ho)\ [(1+z)^2 - 1]$
$d = 12\ c / Ho = 12 * 3 * 10^5 / 75$ Mpc $\approx$ 50 Gpc
2) non, et pourtant d/c = 150 milliards d'années. C'est que d n'est pas une distance "linéaire" mais une distance "photométrique" : c'est la distance à laquelle il faudrait mettre l'objet dans un espace Euclidien pour que sa luminosité apparente corresponde à celle observée.

---

corrigé de l'exercice 3.1 : *Turbulence de l'air et dégradation des images*

a) $\Delta(n-1)/(n-1) = \Delta\rho/\rho = -\Delta T/T \quad \Rightarrow \quad \Delta n \approx -(n-1)\,\Delta T/T$
$n_2 = n_1\,(1+\Delta n)$
$\Delta L = e\,(n_2 - n_1) = e\,\Delta n$
$\Delta L = -e\,(n-1)\,\Delta T/T$

application numérique : $\Delta L = 0.23\ 10^{-6}$ m

b) Le respect du critère de Raleigh implique que la variation de chemin optique ΔL soit inférieure à $\lambda/4$, soit 100 nm dans le cas présent. On voit donc qu'un si faible écart de température suffit à dégrader les images de façon significative. L'image d'une source ponctuelle dégradée par des écarts de phase aléatoire dans le faisceau donne des tavelures, ou speckles.

Corrigé de l'exercice 4.1 : *Mais où est donc Andromède ?*

On utilise toujours la relation :

$$\Phi(d) / \Phi(do) = (do / d)^2 \quad \Rightarrow \quad d = do\ [\Phi(do) / \Phi(d)]^{1/2}$$

On choisit pour do la distance du soleil à la terre. $\Phi(do)$ est alors le flux moyen qu'on recevrait de la céphéïde si elle était à 1 UA de nous.

D'après le diagramme Période-luminosité, une période de 30 jours correspond à une luminosité de 10^4 fois celle du soleil ($L/L_s = 10^4$). Le flux reçu étant proportionnel à la puissance émise, on a donc :

$\Phi(do) = L/L_s\,.\,\Phi_s = 10^4\,.\,\Phi_s$ où Φ_s indique le flux reçu du soleil.
On sait que $\Phi_s = 10^3$ w. m^{-2} donc $\Phi(do) = 10^7$ w. m^{-2}

(Une céphéïde, ça chauffe ! La température d'équilibre sur terre serait de 3000 K d'après la loi de Planck, la terre serait volatilisée)

$d = d_o [\Phi(d_o) / \Phi(d)]^{1/2} = d_o . [L/L_s . \Phi_s/\Phi(d)]^{1/2}$

$d = d_o . (10^4 . 10^3/10^{-15})^{1/2} = d_o 10^{11}$

$d = 10^{11}$ UA

et en parsecs :

$d = 10^{11}/ 2\ 10^5$ pc $= 5\ 10^5$ pc $=$ 500 kpc

Soit 20 fois environ le diamètre de notre galaxie.

Corrigé de l'exercice 4.2 : *Mesure de la masse de la galaxie d'Andromède*

1) On exprime l'accélération à la distance r d'une masse M :
Pour une orbite circulaire : $GM / r^2 = v^2 / r \Rightarrow M = v^2 r / G$

2a) $\Delta\lambda / \lambda = -\Delta F/F = 2 * 10^{-3} \Rightarrow \Delta V_r \approx c\ \Delta\lambda / \lambda = 6 * 10^5$ m s^{-1}
$\Rightarrow V_r = 3 * 10^5$ m s^{-1}

2b) $V_r = V \sin 60°$ $\Rightarrow V = V_r / \sin 60° = 2 V_r / \sqrt{3}$
$V = 3.46 * 10^5$ m s^{-1}

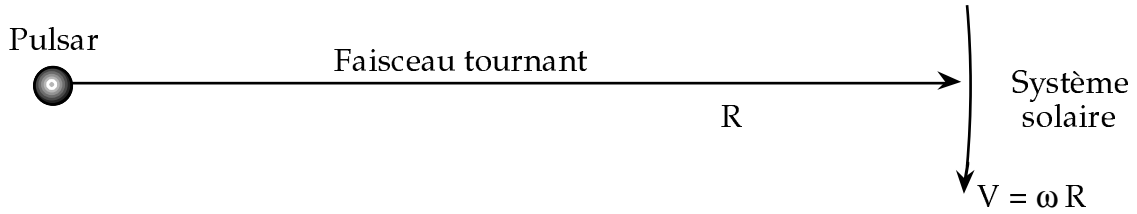
3) $r = D \tan\alpha \approx D\alpha = 600 * 3.09 * 10^3 * 10^{16} * 2 * \pi/180 = 6.47 * 10^{20}$ m
3a) période de rotation : $P = 2\pi r/V \approx 12 * 10^{15}$ s $\approx$ 400 millions d'années

4) $M = v^2 r / G = 3.46^2 * 10^{10}\ 6.47\ 10^{20} / 6.67\ 10^{-11} = 11.9\ 10^{41}$ kg
$= 6.1 * 10^{11}$ masses solaires

Corrigé de l'exercice 4.4 : *Et pourtant elles tournent*

1a) $\alpha = 2\pi * 1/25 * 10^{-6} = 2.5 * 10^{-7}$ radians
1b) $\gamma = 0{,}5*\pi/180 = 8.7 * 10^{-3}$ radians
$\beta = \gamma\alpha = 2.2 *10^{-9}$ radians $= 4.5 * 10^{-4}$ "
2) non car $4.5 * 10^{-4} < 0{,}1$
3) $t = 10 * 0.1 / 4.5 * 10^{-4} = 2200$ ans
4) non, car l'optique fait des progrès, on peut déjà mesurer des angles 10^{-5} " en radio-astronomie.

Corrigé de l'exercice 4.5: *Phare superluminique.*



$v = 2\pi r /T = 200 * 2\pi$ pc/s $= 3.88\ 10^{19}$ m/s

Cette vitesse, 10^{11} fois plus rapide que la lumière, ne remet pas en cause la relativité restreinte car ce n'est pas une particule matérielle qui se déplace mais un point géométrique. Il n'y a pas de relation causale entre deux points éclairés

successivement par le faisceau.

Corrigé de l'exercice 4.6 : *Le Halo de la Supernova*

Pour le rayon h de l'anneau on a la relation :

$$h^2 + d^2 = r^2 = c^2 t^2$$

$$h = [\, c^2 t^2 - d^2 \,]^{1/2}$$

$$h = c\ (t^2 - t_o^2)^{1/2}$$

on définit le temps écoulé τ depuis l'apparition de l'écho par :

$$\tau \equiv t - t_o$$

on a :

$$h = c\,(2\, t_o \tau + \tau^2)^{1/2}$$

La vitesse d'expansion apparente de l'anneau est $v = dh/d\tau$

$$v = dh/d\tau = c\,\tau^{-1/2}\ (2\, t_o + \tau)^{-1/2}\,(t_o + \tau)$$

v tend vers $+\infty$ pour $\tau \to 0$ et reste supérieure à c quel que soit $\tau > 0$. Elle tend vers c pour $\tau \gg t_o$.

Corrigé de l'exercice 4.7 : *Jet Superluminique*

1) Au temps t_o , un nuage part du coeur du quasar à une vitesse v. Cet événement est vu par l'observateur placé à la distance r au temps :

$$T_o = t_o + r/c$$

Au temps t_1 le nuage a parcouru une distance l . On a :

$$t_1 = t_o + l/v$$

Cet événement est vu au temps :

$$T_1 = t_1 + (r - \Delta x)/c$$

La vitesse apparente v_a est donnée par :

$$v_a = \Delta y\ /\ (T_1 - T_o)$$

$$= \Delta y\ /\ (t_o + l/v + r/c - \Delta x/c - t_o - r/c) = \Delta y\ /\ (l/v - \Delta x/c)$$

$$= l \sin\theta\ /\ (l/v - l\cos\theta\ /\ c)$$

$$= \sin\theta\ /\ (1/v - \cos\theta\ /\ c)$$

$$v_a = cv \sin\theta\ /\ (c - v\cos\theta)$$

en notant $\beta \equiv v/c$ et $\beta_a \equiv v_a/c$, on a :

$$\beta_a = \beta \sin\theta\ /\ (1 - \beta\cos\theta)$$

2) Pour trouver le max de β_a en fonction de θ on annule sa dérivée :

$$d\beta_a\ /\ d\theta = \beta\ [\ (1 - \beta\cos\theta)\cos\theta - \beta\sin^2\theta\ ]\ /\ (1 - \beta\,\mathrm{os}\,\theta)^2$$

$$= \beta\ (\beta - \cos\theta)\ /\ (1 - \beta\,\mathrm{os}\,\theta)^2$$

$$d\beta_a\ /\ d\theta = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \beta = \cos\theta$$

On a alors :

$\sin\theta = (1 - \beta^2)^{1/2}$

$\beta_{a\,max} = \beta\ (1 - \beta^2)^{-1/2} = \gamma\beta$

3) On doit avoir $\beta_{a\,max} > 1$ soit :

$\beta\ (1 - \beta^2)^{-1/2} > 1$

$\beta^2 > 1 - \beta^2 \Rightarrow \beta > \sqrt{2}/2$ soit $v > c / \sqrt{2}$

A la valeur limite $v = c / \sqrt{2}$ on a un angle θ tel que :

$\cos\theta = \sqrt{2}/2 \Rightarrow \theta = \pi/4$

4) si $\beta = 0.99$ on a $\beta_{a\,max} \approx (1-0.99^2)^{-1/2} = 7$, soit $v_a \approx 7\,c$.

Corrigé de l'exercice 5.1 : *Sursaut Gamma*

1) $g = Gm/4r^2$; $a = -v^2/r$ et $g = -a$ => $v = 0.5\,(Gm/r)^{1/2}$

2) $V = 57\,600$ km s^{-1} , $T = 1{,}09$ ms

3) $E_g = -Gm^2/2r = 13.2 \times 10^{45}$ J ;

D'après le th. du viriel, $E_c = -E_g/2 \Rightarrow E_c = Gm^2/4r = +\,6{,}60 \times 10^{45}$ J

Énergie mécanique : $E_m = E_g + E_c = -\,6{,}60 \times 10^{45}$ J

4) $r_s = 2G(2m) / c^2 = 5.9$ km

5) diff $E_m = Gm^2/4r_s - Gm^2/4r_1 = Gm^2/4\,(1/r_s - 1/r_1) = 4{,}58 \times 10^{45}$ J

6) $t = 1$s ; $P = 4{,}58 \times 10^{45}$ W, soit 10^{18} fois celle du soleil, et la puissance de 4×10^7 galaxies.

7) $E_{reçu} = Ne/S$; $S = 4\times10^{-3}\,m^2$; Pour un gamma, $e = 1{,}6\times10^{-14}$ J

E $E_{reçu} = 1{,}6\times10^{-11} / 4\times10^{-3} = 4 \times 10^{-9}$ W m^{-2}

8) Pour les gammas : $E_{reçu} = 0.7\times P/4\,PI\,d^2 \Rightarrow d = (0.7\times P/4\,PI\,E_{reçu})^{1/2}$

$d = 2.5\times10^{26}$ m = 8,2 Gpc.

Corrigé de l' exercice 6.1 : : *Tout fout l'camp...*

En prenant $c = H_o d \Rightarrow d = c / H_o$, on aurait : d = 4 à 5 Gpc, mais attention, la relation $v = H_o d$ n'est plus linéaire quand v -> c ; la distance est sous-estimée.

A la distance où v -> c ; z tend vers l'infini :
On part de l'expression de l'effet Doppler longitudinal : $\nu = \gamma (1 - \beta) \nu_o$
$\Rightarrow \nu / \nu_o = [(1 - \beta) / (1 + \beta)]^{1/2}$
Si v-> c alors β-> 1 et ν / ν_o -> 0 .
D'autre part $Z = (\lambda / \lambda_o) - 1 = (\nu_o / \nu) - 1$; ν / ν_o -> 0 $\Rightarrow$ Z -> +∞ .

Cette distance correspond à l'horizon cosmologique.

Corrigé de l' exercice 6.2 : *Densité de l'univers*

$H_o = 2.5\ 10^{-18}\ s^{-1}$

$\rho_{lim} = 3 H_o^2 / 8\pi G \approx 10^{-26}$ kg m^{-3} (environ cinq atomes d'hydrogène par m^3).

Densité observée de l'amas local :

$6\ 10^{11} * 2 * 10^{30} / (5 * 3 * 10^{22})^3 = 1.2\ 10^{42} / 3.4\ 10^{69} = 3\ 10^{-28}$ kg m^{-3}

La densité observée serait 3% de la densité limite... Mais cette mesure de densités est sous estimée. En effet, la statistique des vitesses des galaxies dans l'amas local montre qu'elles sont gravitationnellement liées. C'est le problème de la "masse manquante".

Corrigé de l'exercice 6.3 : *Âge de l'univers*

1) $\Omega = 1 \Rightarrow \rho_o = \rho_{limite} \Rightarrow E = E_g + E_c = 0 \Rightarrow E_g = - E_c$

$$\left.\begin{array}{l} E_g = - GMm/r \\ E_c = mv^2/2 \end{array}\right\} \Rightarrow GMm/r = mv^2/2 \Rightarrow 2\ GM/r = v^2$$

$$dr / dt \equiv v \Rightarrow (dr/dt) = + (2GM)^{1/2}\ r^{-1/2}$$

$$r^{1/2}\ dr = (2GM)^{1/2}\ dt$$
$$\int r^{1/2}\ dr = (2GM)^{1/2} \int dt$$

En prenant comme conditions aux limites r = 0 pour t = 0 on a :

$$2/3\ r^{3/2} = (2GM)^{1/2}\ t$$
$$r^{3/2} = 3/2\ (2GM)^{1/2}\ t$$
$$r = (3/2)^{2/3}\ (2GM)^{1/3}\ t^{2/3}$$

Le rayon croît donc indéfiniment mais de plus en plus lentement. La vitesse dr/dt tend vers l'infini pour t tendant vers 0.

2) On a d'après la loi de Hubble : $v_o = H_o r_o$ donc :

$$H_o r_o = (dr/dt) = + (2GM)^{1/2}\ r_o^{-1/2}$$

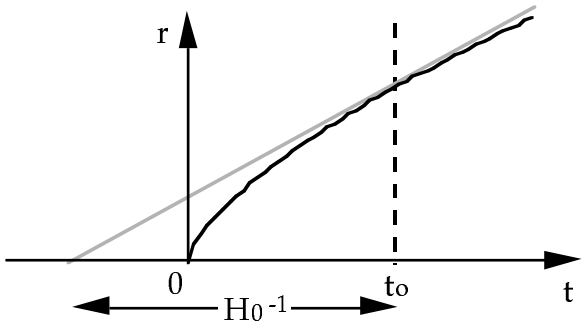
$r_o^{3/2} = (2GM)^{1/2} \; H_o^{-1}$

D'autre part le résultat trouvé en 1) est valable $\forall$ t donc pour t_o :

$r_o^{3/2} = 3/2 \, (2GM)^{1/2} \, t_o$

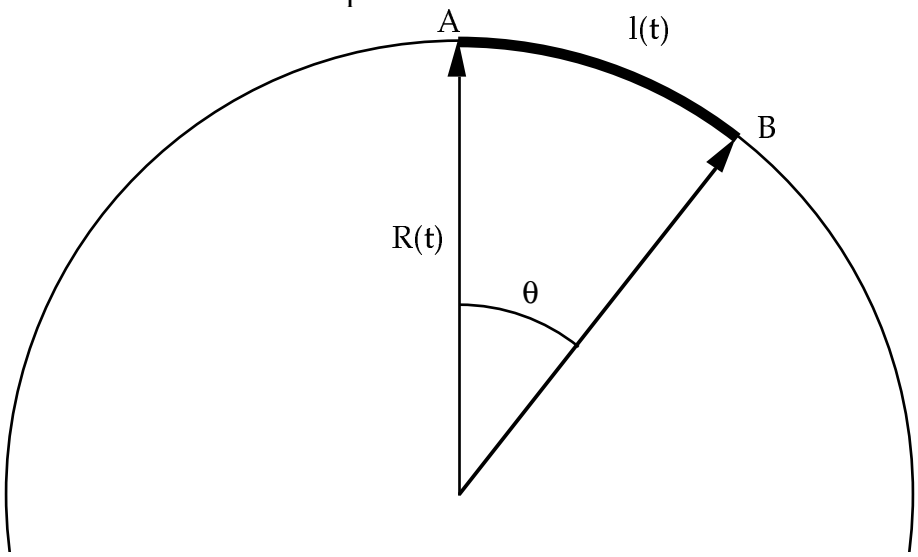
En égalisant les deux :

$3/2 \, (2GM)^{1/2} \, t_o = (2GM)^{1/2} \; H_o^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad t_o = 2/3 \; H_o^{-1}$



Corrigé de l'exercice 7.1 : *Hyper gonflé*

On fait une coupe par un plan de cette 4-sphère. Cela donne un cercle de rayon R(t) dont le centre est celui de la 4-sphère.



On choisit deux points A et B sur ce cercle. La distance qui les sépare sur le cercle vaut : $l(t) = \theta \, R(t) \quad \Rightarrow \quad \theta = l(t) \, / \, R(t)$

L'angle θ reste constant mais R(t) varie.

La variation dans le temps de la distance l (vitesse relative entre A et B) vaut :

$v(t) = dl(t) \, / \, dt = \theta \, dR(t) \, / \, dt \quad = l(t) \; [\, 1/ \, R(t) \; . \; dR(t) \, / \, dt \,]$

On a donc une relation de proportionnalité entre vitesse et distance, similaire à la loi de Hubble :

$v(t) = l(t) \; . \; H(t) \;, \qquad$ où $\qquad H(t) = 1/ \, R(t) \; . \; dR(t) \, / \, dt$

Cette relation est vraie quel que soit le plan choisi pour la coupe et quels que soient les points A et B, donc pour tous les points de la 3-surface de la 4-sphère.

Corrigé de l'exercice 7.3 *Vaincre l'expansion.*

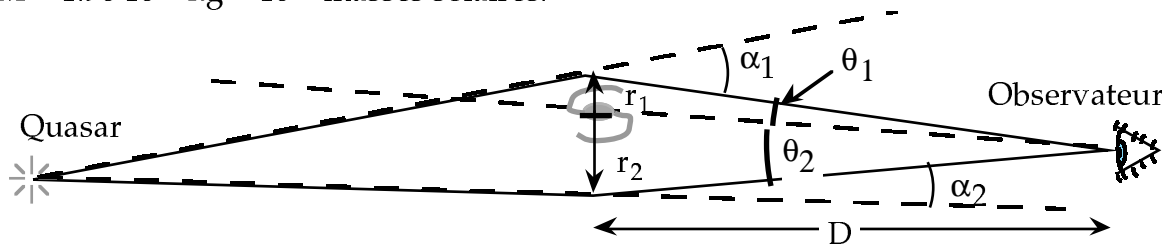
1) $\theta_0 = l_0 \, / R$.

2) $d\theta = v dt / R(t) = v \, a^{-1} \, t^{-2/3} \, dt$

3) $\theta = 3v/a\ [t^{1/3} - t_0^{\ 1/3}]$
4) oui, elle y arrive dans tous les cas. $t = [\theta_0\ a/3v + t_0^{\ 1/3}]^3$
5) $\theta = 3c\ a^{-1}\ t^{1/3}$
6) $l = \theta\ R(t) = 3ct$
7) Si un objet est situé au delà de l'horizon cosmologique, sa lumière mettrait pour nous parvenir un temps supérieur à l'âge de l'univers. On ne peut donc pas recevoir de lumière de cet objet puisqu'il ne peut être plus âgé que l'univers.
8) Il n'y a pas incompatibilité avec le relativité restreinte car le déplacement de l'horizon ne correspond pas au déplacement d'un point matériel.

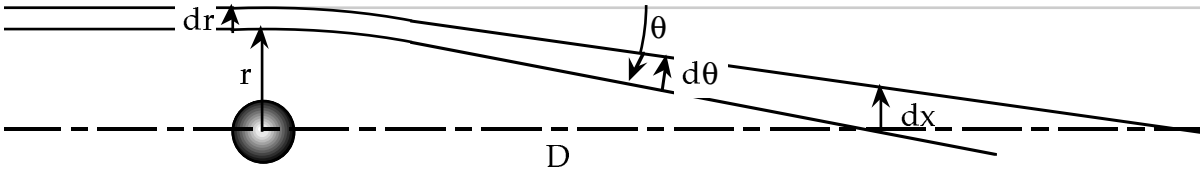
Corrigé de l'exercice 7.1 : *Images gravitationnelles d'un quasar*

a) Galaxie : $z = 0.1$; $v = zc = 3\ 10^4$ km/s ; $D = v/H_o = zc/H_o = 400$ Mpc
Quasar : $d = 800$ Mpc
b) $2\theta = 4GM/rc^2 \Rightarrow M = rc^2\ \theta/2G$
$r = D\theta \Rightarrow M = D\ c^2\ \theta^2\ /2G$
c) $M = 1.96\ 10^{41}$ kg $\approx 10^{11}$ masses solaires.



d)
Soit D la distance de la galaxie, et r_1 et r_2 les distances minimales de passage des rayons près de la galaxie :
$r_1 = D\theta_1 = 4GM/\alpha_1 c^2 \quad \Rightarrow \alpha_1 = 4GM/D\theta_1 c^2$
$r_2 = D\theta_2 = 4GM/\alpha_2 c^2 \quad \Rightarrow \alpha_2 = 4GM/D\theta_2 c^2$
Par addition, on a : $\alpha_1 + \alpha_2 = 4GM\ (1/\theta_1 + 1/\theta_2)\ /Dc^2$ (1)
D'autre part, géométriquement : $\alpha_1 + \alpha_2 = 2(\theta_1 + \theta_2)$ (2)
(1) et (2) $\Rightarrow (\theta_1 + \theta_2) = 2GM\ (1/\theta_1 + 1/\theta_2)\ /Dc^2$
$\Rightarrow M = \theta_1\ \theta_2\ Dc^2\ /2G$

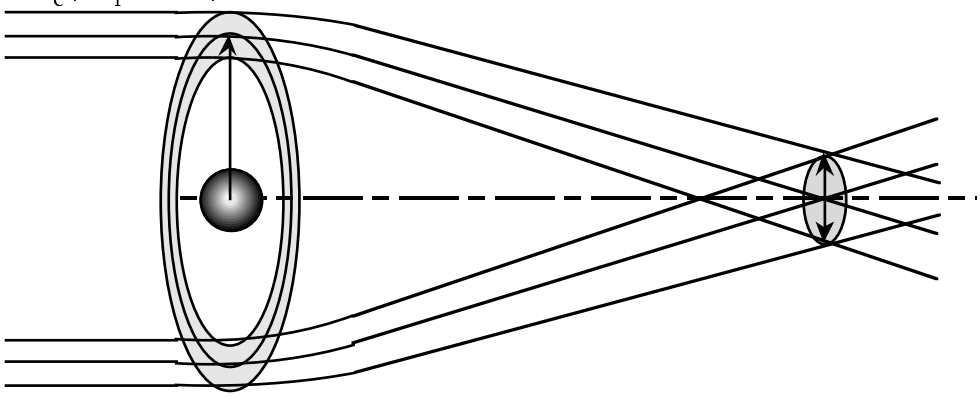
Corrigé de l'exercice 7.2 : *Le télescope Soleil :*
1) $\theta = 4GM/rc^2$ Pour $r = 1.5\ r_o$ on a : $\theta = 5.64 * 10^{-6}$ radians = 1.16″
2) $D = r/\theta = r^2c^2\ /\ 4\pi GM$ Pour $r = 1.5\ r_o$ on a : $D = 1.85\ 10^{14}$ m = 7,1 j.lumière.
3) D_{min} correspond au cas où $r = r_o$: $D_{min} = 0.82 * 10^{14}$ m.
D_{max} correspond au cas où $r = \infty$: $D_{max} = \infty$.
4) Une gravitationnelle lentille n'est pas de bonne qualité car D n'est pas invariable : il dépend de r. Une telle lentille est cependant achromatique car la courbure de l'espace concerne de la même façon toutes les particules sans masse au repos.
5) On la verrait comme un anneau brillant entourant le soleil.
6) $\theta = 4GM\ /\ rc^2$
$d\theta = -\ 4GM\ /\ r^2\ c^2\ dr$ comme $D = r^2\ c^2\ /\ 4GM$ on a : $d\theta = -\ dr\ /\ D$
$dx = dr - D\ d\theta = dr + dr$; $dx = 2\ dr$.



7) $dx \leq 50$ mm $\Rightarrow dr \leq 25$ mm .

8) Surface collectrice : $S_c = 2\pi\, r * 2dr = 2\pi\, r\, dx$; tache focale : $S_f = \pi\, dx^2$

$S_c / S_f = 2r / dx$



9) Rapport d'amplification = $S_c / S_f = 2r / dx$

Pour les conditions du pb : $2r/dx = 4.18\ 10^{10}$

Oui, au foyer de ce "télescope" , la lumière d'une source ponctuelle à l'infini est amplifiée dans un rapport 10^{10} !