

Instrumentation en astrophysique

Mastère 2

1. Détecteurs

Présentation rapide de différents types détecteurs

exercice : Domaines de longueur d'onde et type de détection.

2. Fonctions de transfert instrumentales et atmosphérique

Représentation du front d'onde

Turbulence, tavelures

Relation entre objet et image en éclairage incohérent

Rayon de cohérence

Temps de cohérence

Rapport de Streilh

Isoplanétisme

exercices : Turbulence et respect du critère de Rayleigh, Isoplanétisme.

3. Optique adaptative

mesure du front d'onde

Senseur de gradient (Shack-Hartmann)

Senseur de courbure

Senseur pyramidal

Étoiles artificielles

Miroirs actifs

Correction multi conjuguée (MCAO)

exercices : Applications de l'optique adaptative

4. pixels, resels et information

Lecture des données

Représentation d'une image en comptage de photons

Pixels et information

Performance et limites de l'interférométrie

Synthèse d'ouverture

Contraintes sur la mise en oeuvre des interféromètres

Imageurs optiques et information

exercices d'application sur la synthèse d'ouverture

Notations :

pour indiquer un scalaire :	lettre en trait fin. Exemple	x
pour indiquer un vecteur :	lettre en gras. Exemple :	$\mathbf{x}$
longueur d'onde :	λ ; nombre d'onde :	$\sigma = 1/\lambda$
fréquence :	$\nu = c/\lambda$; vecteur d'onde :	$ \mathbf{k} = 2\pi/\lambda$
Position spatiale linéaire ou angulaire :		$\mathbf{x}$
Fréquence spatiale linéaire ou angulaire :		$\mathbf{u}$
Transformée de Fourier d'une fonction $\mathbf{h}(x)$:		$\hat{h}(u)$
Produit de convolution de deux fonctions h et g :		$h * g$
Produit simple de deux fonctions h et g :		$h g$
complexe conjugué d'une fonction $\mathbf{f}(x)$:		$f^*(x)$
Distribution de Dirac :		$\delta(x)$
Sinus cardinal : $\sin(x) / x$:		$\text{sinc}(x)$

Alphabet Grec

alpha	A	α
beta	B	β
gamma	Γ	γ
delta	Δ	δ
epsilon	E	ϵ
zeta	Z	ζ
eta	H	η
theta	Θ	θ
iota	I	ι
kappa	K	κ
lambda	Λ	λ
mu	M	μ
nu	N	ν
xi	Ξ	ξ
omicron	O	$\omicron$
pi	Π	π
rho	P	ρ
sigma	Σ	σ
tau	T	τ
upsilon	Y	υ
phi	Φ	ϕ
khi	X	χ
psi	Ψ	ψ
omega	Ω	ω

Sur quoi porte ce cours ?

Sur l'astrophysique instrumentale dans le domaine visible. Toutefois, ce qui traite du signal en tant qu'onde pourrait s'appliquer à d'autres longueurs d'onde, et même à des ondes autres qu'électromagnétiques (mais associées à un champ vectoriel).

1. Détection de la lumière

1.1 Spectre visible, sensibilité de l'oeil :

La rétine de l'oeil dispose de quatre types de récepteurs sensibles à des domaines de longueur d'onde différents : trois pour la vision diurne, dans le rouge, le vert et le bleu, et un seul pour la vision nocturne sensible dans le bleu. En vision nocturne on n'a donc pas d'information de couleur. A niveau de lumière intermédiaire entre la vision diurne et la vision nocturne, le canal bleu de la vision nocturne prend le relais du canal bleu de la vision diurne. En vision diurne, le spectre de la lumière reçue est "projeté" sur une base de trois composantes.

Couleurs conventionnelles et domaines spectraux associées :

violet 400 - 446 nm

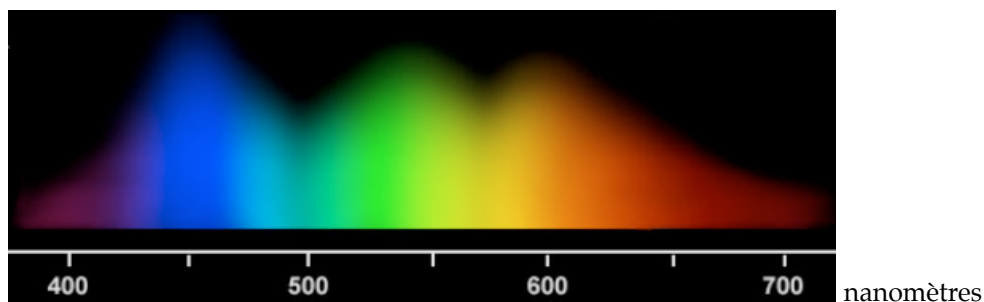
bleu 446 - 500 nm

vert 500 - 578 nm

jaune 578 - 592 nm

orange 592 - 620 nm

rouge 620 - 750 nm



Couverture spectrale de l'oeil dans les trois canaux de la vision diurne. La hauteur du spectre à une longueur d'onde donnée correspond à la sensibilité de l'oeil pour cette longueur d'onde. On voit les trois pics, respectivement dans le rouge, le vert et le bleu.

1.2 Intensité de la lumière et amplitude complexe de l'onde

A l'opposé des détecteurs dans le domaine radio, les détecteurs dans le domaine visible et aux plus courtes longueurs d'onde ne mesurent pas l'amplitude complexe d'une onde $\Psi(x)$, mais seulement son intensité : $I(x) = \Psi(x) \Psi^*(x)$. Cette mesure est déduite du nombre de photons qui ont interagi avec le détecteur. C'est aussi le cas pour l'oeil, les caméras ccd et la photo. On n'a donc pas accès à la phase de l'onde, en revanche, on peut mesurer des différences de phase entre deux ondes, en les faisant interférer puis en mesurant l'intensité de l'onde combinée pour différents déphasages.

La transition entre les modes de détection "ondulatoire" ou "cohérent": $\Psi(x)$ d'une part, et le mode "quantique" ou "incohérent": $I(x) = \Psi(x) \Psi^*(x)$ d'autre part, se fait à une longueur d'onde qui dépend de l'amplitude de l'onde détectée. En fait la détection est toujours quantique, et c'est lorsque le nombre de photons détectés par période de l'onde est supérieur à quelques unités que l'on peut commencer à mesurer la phase.

exercice :

Pour mesurer l'amplitude complexe d'une onde électromagnétique, on mesure l'évolution du champ électrique associé à cette onde en fonction du temps. D'après Shannon, pour mesurer un signal jusqu'à une fréquence donnée il faut qu'il soit échantillonné au moins deux fois par période.

Dans le cas d'une onde électromagnétique, la mesure se fait à partir du déplacement des électrons causé par le champ électrique associé à l'onde.

L'action du champ sur les électrons est quantifiée : l'énergie minimale d'interaction est celle d'un photon. Je fais l'hypothèse pour cet exercice que durant une période de l'onde il faut que deux (ou plus) photons ait interagi avec des électrons du détecteur pour qu'une mesure soit réalisable.

1) Exprimer en fonction de l'éclairement ϵ (en $W \cdot m^{-2}$) associé à une onde monochromatique de fréquence ν , l'énergie E reçue sur une surface S pendant une période de cette onde.

2) Exprimer l'énergie associée à N photons de fréquence ν .

3) Donner la relation sur l'éclairement imposée par un nombre minimal N de photons reçus par période sur la surface S du détecteur,

4) Pour qu'une détection cohérente de l'onde puisse avoir lieu, on suppose que cette onde doit être cohérente sur toute la surface S du détecteur. Cette condition impose au détecteur d'avoir une section plus petite que la largeur de cohérence. Rappel : la largeur de cohérence d'une source incohérente comme une étoile, s'exprime à partir de la longueur d'onde λ utilisée et du diamètre angulaire θ de la source. En partant de la réponse 3), déduire une nouvelle condition sur l'éclairement.

5) Faire l'application numérique donnant l'éclairement minimal pour $N = 2$ dans les trois cas suivants :

a) $h\nu = 1 \text{ MeV}$, $\theta = 10^{-16}$ radians (sursaut gamma à $Z=0,2$)

b) $\lambda = 0,5 \mu m$, $\theta = 10^{-2}$ radians (Soleil dans le domaine visible).

c) $\lambda = 5 \text{ mm}$, $\theta = 10^{-8}$ radians (étoile proche dans le domaine radio millimétrique).

On donne : Constante de Planck $h = 6.626176 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$

Corrigé :

1) *Energie incidente sur le détecteur durant une période de l'onde, exprimé en fonction de l'éclairement :*

$$E = \epsilon S \nu^{-1}$$

2) *Energie fournie par N photons : $E = N h \nu$*

3) *Pour qu'il y ait au moins N photons par période de l'onde sur un pixel du détecteur, il faut :*

$$\epsilon S \nu^{-1} \geq N h \nu$$

ce qui implique pour l'éclairement : $\epsilon \geq N h \nu^2 S^{-1}$

4) Pour une source incohérente, la largeur de cohérence vaut $a = \lambda / \theta$. La "surface" associée vaut $a^2 = \lambda^2 \theta^{-2}$, où θ est l'angle sous lequel on voit la source. La condition : $S < a^2$ impose donc :

$$\epsilon \geq N h \nu^2 \lambda^{-2} \theta^2$$

$$\epsilon \geq N h c^{-2} \nu^4 \theta^2$$

On peut aussi exprimer cette condition sur le flux lumineux associé à la source, en watts par stéradian par m^2 :

$$\epsilon \theta^{-2} \geq N h c^{-2} \nu^4 \Rightarrow I \geq N h c^{-2} \nu^4$$

On voit ici que la fréquence (ou bande de fréquence) dans laquelle on observe la source est le paramètre clef.

5) A.N. pour $N = 2$

a) Sursaut gamma : $\nu = 2,4 \cdot 10^{20} \text{ s}^{-1}$

$$\Rightarrow \epsilon \geq 0,4 \text{ W m}^{-2}$$

j'espère que cela n'arrivera jamais : la puissance émise serait 10^{68} W .

un "gros" sursaut gamma de 10^{47} W donne un éclairement de $4 \cdot 10^{-12} \text{ W m}^{-2}$ près de la terre. La mesure de l'amplitude complexe de l'onde est donc impossible.

b) Soleil dans le visible : $\nu \geq 6 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$

$$\Rightarrow \epsilon \geq 1,9 \cdot 10^5 \text{ W m}^{-2}$$

L'éclairement naturel du soleil sur terre est de $1,3 \cdot 10^3 \text{ W m}^{-2}$. Il faudrait 150 fois plus.

Dans ce cas aussi, la mesure de l'amplitude complexe de l'onde est impossible.

c) étoile dans le millimétrique : $\nu = 6 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$

$$\Rightarrow \epsilon \geq 1,9 \cdot 10^{-23} \text{ W m}^{-2} \text{ les éclairagements donnés par les étoiles et nébuleuses proches sont des centaines de milliards de fois plus forts. La mesure "amplitude" est possible.}$$

La transition entre les modes de détection "amplitude" et "intensité" pour des sources naturelles dans notre environnement se fait à des longueurs d'onde juste en dessous du millimétrique.

Cette partie du cours d'instrumentation en astrophysique concerne le domaine visible avec des sources généralement faibles. Les détecteurs sont donc en mode incohérent.

1.3 Caractérisation des détecteurs

Un photon détecté fournit plusieurs informations :

- 3 coordonnées de son impact sur une cible bidimensionnelle : x , y et t .
- son énergie ou la longueur d'onde correspondante : $h \nu$ ou λ
- sa polarisation.

Selon le type de détecteur on a accès à un ou plusieurs de ces paramètres, rarement tous à la fois.

Les performances d'un détecteur en mode incohérent sont définies par :

- l'efficacité quantique $Q_e = N_d / N_i$

où N_i est le nombre de photons incidents et N_d le nombre de photo-électrons détectés (par exemple 0,6 pour un CCD (Charge Coupled Devices) et 0,12 pour un détecteur à comptage de photons).

- le bruit de lecture

N_b = nombre d'électrons de bruit par pixel et par unité de temps (ou par pixel et par lecture pour les ccd)

par exemple 2 pour les ccd et 10^{-3} pour les détecteurs à comptage.

- Le flux de saturation

N_{max} = nombre maximum de photons acceptable par pixel et par unité de temps (ou par pixel et par lecture pour les ccd).

La quantité N_{max} / N_b est la dynamique photométrique du détecteur. Elle est liée à la quantité d'information apportée par une mesure avec ce détecteur par la relation :

$$H = \lg(N_{max} / N_b) \text{ où } \lg \text{ veut dire } \log \text{ à base } 2.$$

Les caractéristiques suivantes sont aussi des dynamiques :

- le champ ou résolution spatiale, *en nombre de pixels*, par exemple 2000 x 2000

- la résolution temporelle *en secondes*

par exemple 20 ms pour une caméra vidéo ou 2 μ s pour un détecteur à comptage de photons. Ici, la dynamique est le rapport entre la durée totale d'enregistrement et la résolution temporelle.

- la résolution spectrale $\lambda / \Delta\lambda$

par exemple 100 pour un détecteur à jonction Josephson.

Historiquement, l'oeil a été le détecteur "naturel" pour le visible jusqu'à la généralisation de la photographie (1920) et son remplacement par l'électronique à partir de 1960. Actuellement les détecteurs les plus utilisés sont les CCD pour l'I.R. thermique et le visible, et les détecteurs à comptage de photons pour le visible l'UV, les X et les γ).

Dans le visible, les détecteurs habituellement utilisés ne donnent pas ou peu de résolution spectrale. Pour mesurer précisément la longueur d'onde des photons détectés on met une ou plusieurs fentes dans le plan image et on disperse avec un spectro. Ceci revient à coder l'information en λ sur l'une des dimensions du détecteur : (x, y) devient alors (x, λ) .

On peut aussi moduler la différence de marche dans un petit interféromètre de Michelson (cohérence temporelle) placé après le foyer, puis en déduire le spectre de la source à partir de la variation de l'intensité en fonction de la différence de marche. C'est la spectroscopie par TF : (x, y, t) devient (x, y, λ) . Pour que cela marche il faut que l'objet n'évolue pas pendant la mesure.

1.4 Lecture des données

Selon le type de caméra, les données apparaissent comme une lecture séquentielle des pixels ou comme une liste des coordonnées des photons détectés. Avec les détecteurs à comptage on a la position de chaque photon individuellement. Dans ce cas on peut reconstruire l'image $I(\mathbf{x})$ en faisant l'histogramme des coordonnées:

$$I(\mathbf{x}) = \sum_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$$

$\mathbf{x}$ (en gras) est un vecteur 2D qui représente la position (x,y) dans l'image.

$\mathbf{x}_i$ est la coordonnée d'arrivée du photon i dans l'image.

$\sum_i$ indique la sommation pour tous les photons.

δ est une distribution de Dirac :

$$\delta(\mathbf{x}) = 0 \text{ pour } \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \text{ et } \iint \delta(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = f(\mathbf{0})$$

Pour le traitement des images on a souvent besoin de travailler dans le plan de Fourier. Dans le cas précédent on peut directement faire la TF de l'image à partir des coordonnées de photons :

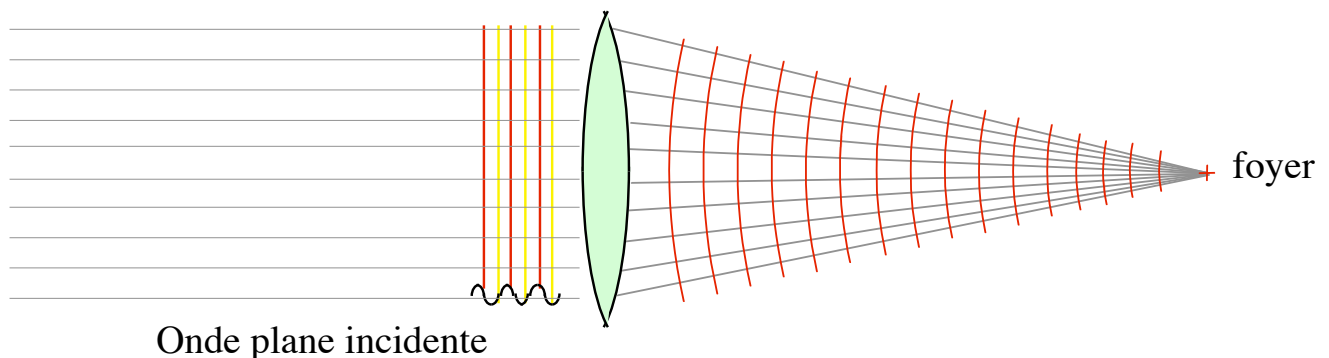
$$\hat{I}(\mathbf{u}) = \iint \sum_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \exp(-2i\pi \mathbf{u} \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_i \exp(-2i\pi \mathbf{u} \mathbf{x}_i)$$

Procéder de cette façon peut conduire à un gain important en temps de calcul dans le cas de données sous forme de coordonnées de photons (avec les caméras à comptage).

2. Images et fonction de transfert atmosphérique

2.1 Front d'onde (ou surface d'onde)

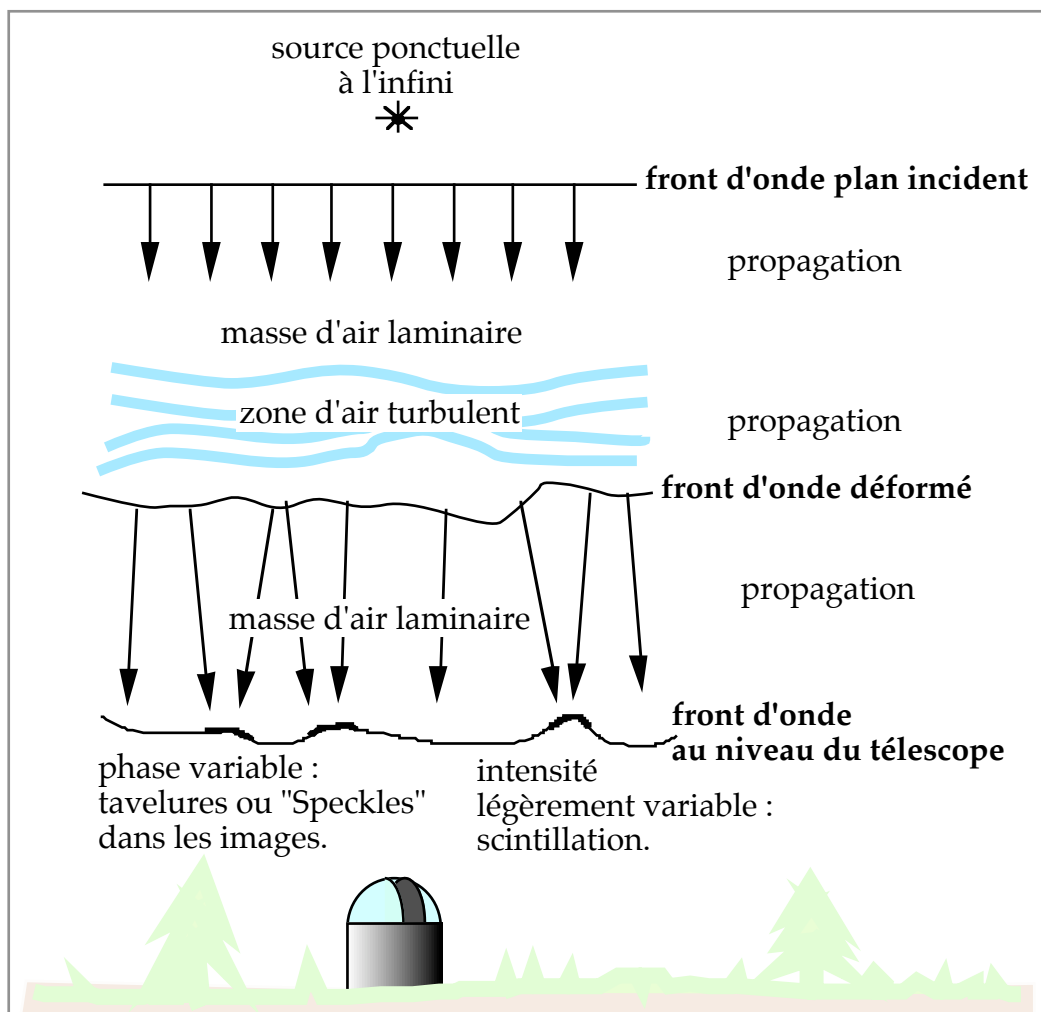
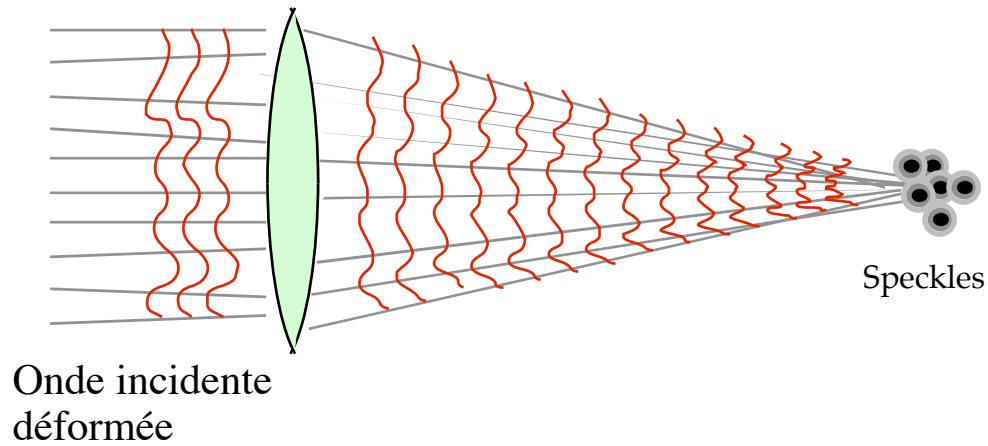
Un front d'onde est une surface "isophasé" de l'onde. Il se déplace à la vitesse de la lumière dans le milieu considéré. En chaque point, le front d'onde est perpendiculaire à la direction de propagation (Huygens). Deux fronts d'onde successifs sont séparés par λ .



Dans un milieu isotrope, les fronts d'onde issus d'une source ponctuelle sont des sphères centrées sur celle-ci. Il en est de même pour les surfaces d'onde allant vers l'image stig-

matique d'une source ponctuelle. Si le milieu est inhomogène, les différents points d'un front d'onde prennent de l'avance ou du retard et la surface d'onde devient "chiffonnée".

2.2 Effet de la turbulence sur un front d'onde



exercice : Turbulence de l'air et dégradation des images

a) Calculer la différence de chemin optique L associée à la traversée d'une veine d'air "froid" de 0.25 m d'épaisseur ayant un écart en température de 1 °C avec l'air environnant : température de l'air environnant : 300K.

L'indice de l'air est $n = 1,0002817$ à $\lambda = 400$ nm, et $(n-1)$ varie proportionnellement à la densité de l'air. On est à pression constante et on considère l'air comme un gaz parfait.

b) Cette veine d'air froid empiète sur une partie du passage de la lumière arrivant dans un télescope. Le critère de Rayleigh impose que les défauts de surface d'onde soient inférieurs à $\lambda/4$ pour maintenir une réponse impulsionnelle limitée par la diffraction. Quels sont les effets de cette lame d'air sur les images pour $\lambda = 400$ nm?

b) Le respect du critère de Rayleigh implique que la variation de chemin optique ΔL soit inférieure à $\lambda/4$, soit 100 nm ici. On voit qu'un si faible écart de température suffit à dégrader les images.

a) $\Delta L = e(n_2 - n_1) = e \Delta n$ donc $\Delta L = -e(n-1) \Delta T / T$

application numérique : $\Delta L = 0.23 \cdot 10^{-6}$ m

a) $\Delta(n-1)/p = \Delta p/p = -\Delta T/T$ $\Delta(n-1) \approx -n \Delta T/T$

corrigé de l'exercice : Turbulence de l'air et dégradation des images

expérience : Speckles en éclairage cohérent

matériel nécessaire : pointeur laser + lentille ($f = 5$ à 50 mm) pour étaler le faisceau.

Fixer la lentille à la sortie du pointeur laser, regarder la tache du faisceau étalé sur un écran. Prenez les précautions nécessaires pour que le faisceau ou son reflet n'atteigne pas les yeux de quelqu'un. Ne jamais regarder fixement l'impact sur un écran d'un faisceau laser, même de faible puissance, s'il n'a pas été étalé par une optique quelconque : DANGER !

On voit des speckles sur l'écran car les différentes parties éclairées par le laser sont des sources cohérentes entre elles et leurs amplitudes s'ajoutent, formant des interférences sur la rétine. La taille angulaire des speckles vus par l'oeil vaut :

$$\theta_s = \lambda/D \text{ où } D \text{ est le diamètre de la pupille de l'oeil.}$$

La taille angulaire de ces speckles ne dépend pas de la distance de l'oeil à l'écran. Elle dépend par contre de D . On peut faire varier celui ci en plaçant un diaphragme devant son oeil.

voir le cours de J P Perez sur la fonction de transfert en éclairage cohérent.

expérience : Speckles en éclairage incohérent.

Matériel nécessaire :

Lampe halogène de bureau ou une autre source ponctuelle.

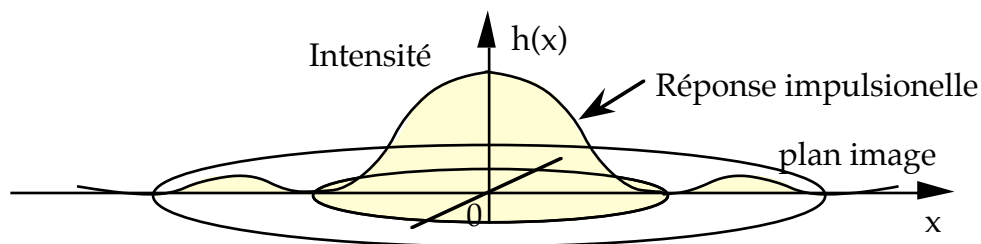
Cache plastique dépoli (type couverture de cahier)

Négatif sur film à grain fin des masques ci-dessous ou à défaut trous d'épingle de $\varnothing 1$ et 0.2 mm dans du papier d'aluminium.

Se placer à plusieurs mètres de la source lumineuse pour qu'elle apparaisse ponctuelle et la regarder avec le masque ci-dessus placé contre son oeil (diapositive ou alu). On observe la fonction de transfert incohérente sans aberration. En plaçant le plastique dépoli devant le masque on introduit des distorsions de phase et crée des speckles. Comparer les speckles vus à travers le trou $\varnothing 1$ mm, le trou $\varnothing 0.2$ mm et les deux ouvertures rapprochées.

2.3 Relation entre objet et image en éclairage incohérent

Un télescope donne d'une source ponctuelle à l'infini une image diffractée, C'est la réponse impulsionnelle : $h(x)$; x représentant la coordonnée 2D dans le plan image. Les américains la nomment PSF (Point Spread Function).



On note $H(x)$ la réponse impulsionnelle en intensité *normalisée* à 1, définie par :

$$H(x) = h(x) / h(0)$$

La transformée de Fourier de $H(x)$, ou fonction de transfert de l'instrument optique, est :

$$\hat{H}(u) = \iint H(x) \exp(-2i\pi u x) dx.$$

Par le théorème de Parseval on a :

$$\iint \hat{H}(u) du = H(0) = 1.$$

Pour un objet étendu dont l'intensité dans l'image géométrique serait représentée par $O(x_g)$, l'Image diffractée $I(x)$ provient de la somme des contributions de différents points de l'objet :

$$I(x) = \iint O(x_g) H(x - x_g) dx_g$$

Soit en indiquant par $*$ l'opérateur de convolution : $[f*g](x) = \int f(x') g(x - x') dx'$

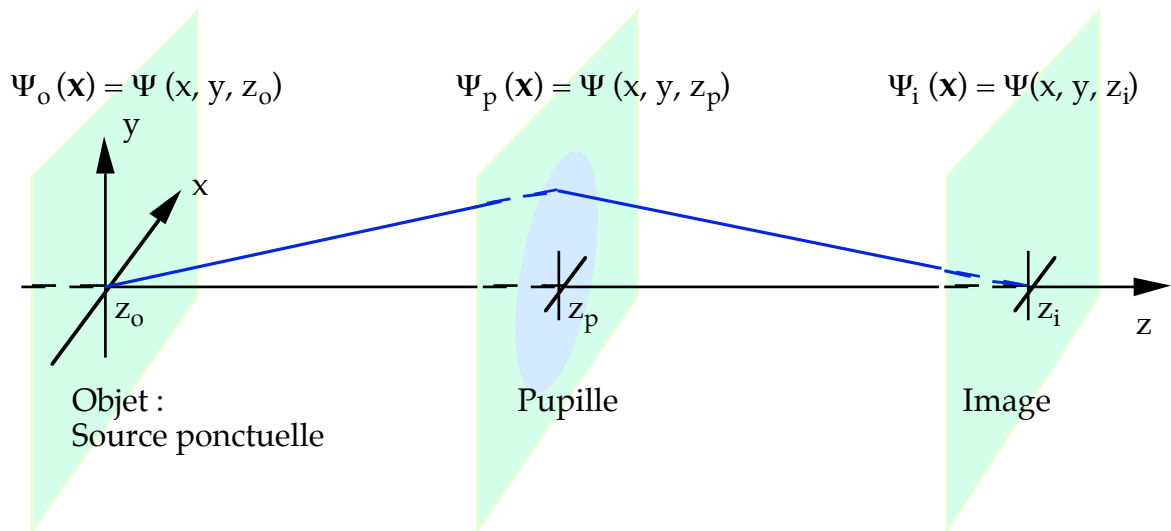
$$\mathbf{I}(\mathbf{x}) = [\mathbf{O} * \mathbf{H}](\mathbf{x})$$

D'après les propriétés de la convolution, dans le plan de Fourier on a :

$$\hat{\mathbf{I}}(\mathbf{u}) = \hat{\mathbf{O}}(\mathbf{u}) \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{u}),$$

$$\text{où } \hat{\mathbf{O}}(\mathbf{u}) \text{ est la TF de l'objet : } \hat{\mathbf{O}}(\mathbf{u}) = \iint \mathbf{O}(\mathbf{x}) \exp(-2i\pi \mathbf{u} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

La convolution dans le plan image devient une multiplication dans le plan TF. Le mot de "fonction de transfert" indique l'action du télescope aux différentes fréquences spatiales : la TF de l'objet est plus ou moins bien "transmise" pour donner la TF de l'image.



Propagation de l'onde et formation d'une image. Une onde $\Psi(x, y, z)$ se propage selon l'axe z , elle part du plan objet, passe par le plan pupille puis par le plan image. On la note respectivement $\Psi_o(\mathbf{x})$, $\Psi_p(\mathbf{x})$, $\Psi_i(\mathbf{x})$ dans les plans Objet, Pupille puis Image.

En notant $\Psi_i(\mathbf{x})$ l'onde dans le plan image issue d'une source ponctuelle, on a :

$$\hat{h}(\mathbf{u}) = \iint \mathbf{H}(\mathbf{x}) \exp(-2i\pi \mathbf{u} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \iint \langle \Psi_i(\mathbf{x}) \Psi_i^*(\mathbf{x}) \rangle \exp(-2i\pi \mathbf{u} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

$\mathbf{x}$ $\equiv$ position dans un plan perpendiculaire à l'axe z (ici le plan pupille)

$\mathbf{u}$ $\equiv$ fréquence spatiale.

Comme l'onde dans le plan image s'obtient par diffraction de Fraunhofer à partir de l'onde dans le plan pupille, on peut exprimer $\hat{h}(\mathbf{u})$ à partir de l'onde Ψ_p dans le plan pupille :

$$\hat{h}(\mathbf{u}) = \iint \Psi_p(\mathbf{x}) \Psi_p^*(\mathbf{x} - \lambda f \mathbf{u}) d\mathbf{x}$$

λ $\equiv$ longueur d'onde.

f $\equiv$ focale du système optique.

Juste avant le plan pupille, l'onde n'est pas encore diaphragmée. Elle s'écrit:

$$\Psi'_p(\mathbf{x}) = A_0 \exp(i\omega t) \exp(-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$$

On suppose que $\mathbf{r}$ est perpendiculaire au plan pupille car on place la source à l'infini et centrée sur l'axe z , donc $\exp(-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \exp(-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{z})$, et ne dépend pas de $\mathbf{x}$.

Juste après son passage par le plan pupille, l'onde a été diaphragmée, elle s'écrit alors:

$$\Psi_p(\mathbf{x}) = A_0 \exp(i\omega t) \exp(-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) P(\mathbf{x})$$

Les deux expressions précédentes correspondent au même z car on suppose que l'action de la pupille est locale en ce plan.

2.4 Effet des aberrations sur la fonction de transfert.

$P(\mathbf{x})$ est la transmission dans le plan pupille. Cette "transmission" est un complexe qui peut avoir un module variable en fonction de la position $\mathbf{x}$ dans le plan : c'est de l'absorption si $|P(\mathbf{x})| < 1$. Il peut y avoir aussi une phase variable en fonction de $\mathbf{x}$ comme par exemple avec une lame d'air à température inégale ou un matériau optique d'épaisseur variable.

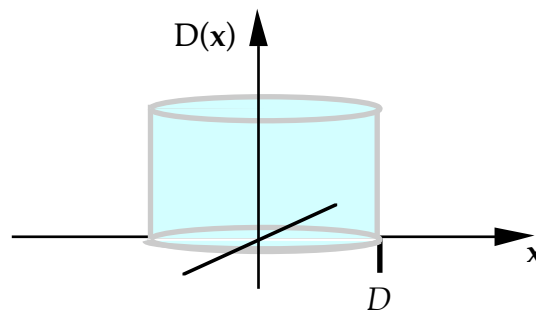
Comme le terme $\exp(i\omega t) \exp(-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ dans l'expression de l'onde $\Psi_p(\mathbf{x})$ est constant selon $\mathbf{x}$ et de module 1, on a:

$$\hat{h}(\mathbf{u}) = \iint \Psi_p(\mathbf{x}) \Psi_p^*(\mathbf{x} - \lambda f \mathbf{u}) d\mathbf{x} = A_0^2 \iint P(\mathbf{x}) P^*(\mathbf{x} - \lambda f \mathbf{u}) d\mathbf{x}$$

En normalisant à 1 on obtient la fonction de transfert normalisée :

$$\hat{H}(\mathbf{u}) = \hat{h}(\mathbf{u}) / A_0^2 = \iint P(\mathbf{x}) P^*(\mathbf{x} - \lambda f \mathbf{u}) d\mathbf{x}$$

Dans le cas d'un télescope *sans aberration* dont le miroir a un diamètre D , la fonction $P(\mathbf{x})$ peut être représentée par une fonction disque $D(\mathbf{x})$ valant 1 pour tout $\mathbf{x}$ compris dans un disque de diamètre D , et 0 ailleurs.



En observant l'intégrale dans l'expression de la fonction de transfert $\hat{H}(\mathbf{u})$ on voit que ce sont les points les plus écartés du front d'onde dans la pupille qui donnent les hautes fréquences spatiales dans l'image.

Sans aberration :
$$\hat{H}(\mathbf{u}) = \iint D(\mathbf{x}) D(\mathbf{x} - \lambda f \mathbf{u}) d\mathbf{x}$$

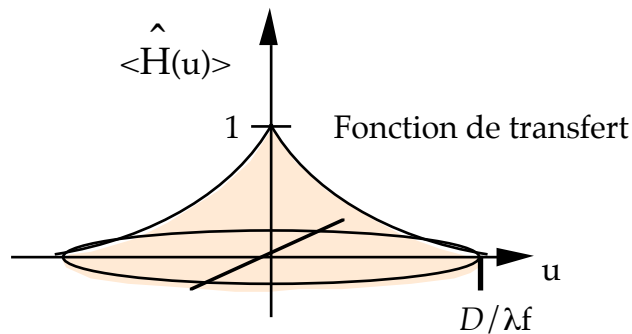
$\mathbf{x}$ = position dans le plan pupille.

$\mathbf{u}$ = fréquence spatiale.

$D(x)$ $\equiv$ fonction diaphragme: vaut 1 si x est dans l'ouverture, 0 ailleurs.

$\lambda \equiv$ longueur d'onde utilisée.

$f \equiv$ focale du système optique.



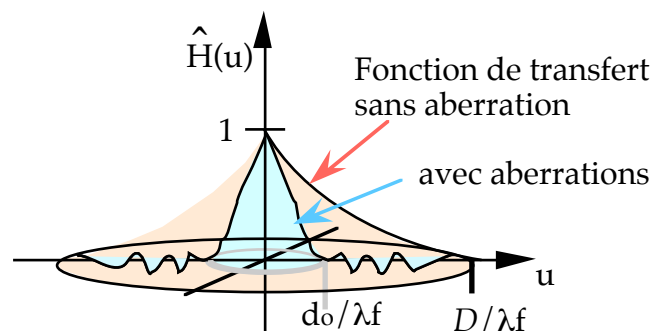
Dans le cas d'un télescope *avec aberration*, la transmission $P(x)$ au niveau de la pupille peut être décomposée en deux facteurs :

$$P(x) = D(x) \cdot A(x)$$

où $A(x)$ est le facteur d'aberration, complexe et variable selon x en fonction des différences de phase (ou de marche optique) causées par les défauts du front d'onde au niveau de la pupille. $A(x)$ peut aussi être de module variable en fonction de x si par exemple il y a une transmission variable au niveau de la pupille, ou si l'amplitude de l'onde n'est pas la même sur toute la pupille.

La fonction de transfert s'exprime alors :

$$\text{Avec aberration : } \hat{H}(u) = \iint D(x) D(x - \lambda f u) A(x) A^*(x - \lambda f u) dx$$



Fonction de transfert avec aberrations : elle chute rapidement jusqu'à $d_0/\lambda f$, mais il reste une transmission faible variable jusqu'à la fréquence de coupure.

On voit que l'effet des aberrations est de réduire fortement la valeur de $\hat{H}(u)$ pour des valeurs de u supérieures à $d_0/\lambda f$ jusqu'à la fréquence spatiale de coupure $D/\lambda f$. La valeur de d_0 dépend de l'amplitude des aberrations : d_0 décroît quand l'amplitude des aberrations de front d'onde augmente.

Dans tous les cas $\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{u})$ vaut 0 au delà de $|\mathbf{u}| = D/\lambda f$: le support de $\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{u})$ est un cercle de rayon $D/\lambda f$ dans le cas d'une ouverture circulaire de diamètre D . La fréquence spatiale limite est notée u_c (fréquence de coupure) :

$$u_c = D/\lambda f$$

2.5 Évolution dans le temps de la fonction de transfert atmosphérique.

Pour un instrument optique affecté par la turbulence atmosphérique, la réponse impulsionnelle dépend du temps et devient $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)$: la "réponse impulsionnelle instantanée". La relation de convolution entre image (dépendante du temps) et objet (supposé fixe) s'écrit :

$$\text{Espace image : } \mathbf{I}(\mathbf{x}, t) = [\mathbf{O} * \mathbf{H}](\mathbf{x}, t)$$

$$\text{Espace de Fourier : } \hat{\mathbf{I}}(\mathbf{u}, t) = \hat{\mathbf{O}}(\mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{u}, t)$$

La "Fonction de transfert instantanée" est :

$$\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{u}, t) = \iint D(\mathbf{x}) D(\mathbf{x} - \lambda f \mathbf{u}) A(\mathbf{x}, t) A^*(\mathbf{x} - \lambda f \mathbf{u}, t) d\mathbf{x}$$

Les facteurs $D(\mathbf{x})$ et $D(\mathbf{x} - \lambda f \mathbf{u})$ correspondent à la fonction de transfert sans aberration: l'autocorrélation de $D(\mathbf{x})$, dite fonction "diaphragme" associée à l'ouverture du télescope, indépendante du temps.

Les facteurs $A(\mathbf{x}, t)$ et $A^*(\mathbf{x} - \lambda f \mathbf{u}, t)$ sont la partie liée aux aberrations du front d'onde causées par l'atmosphère et les défauts de l'optique : filtrage en phase et en amplitude.

Mettons $A(\mathbf{x}, t)$ sous la forme :

$$A(\mathbf{x}, t) = A_m(\mathbf{x}, t) \exp [i\varphi(\mathbf{x}, t)] \quad \text{où } \varphi(\mathbf{x}, t) \text{ est le terme de phase.}$$

Le module $A_m(\mathbf{x}, t)$ dans la contribution de l'atmosphère à la fonction de transfert vaut 1 s'il n'y a que des défauts de déphasage et qu'ils sont créés au niveau de la pupille. Si des déphasages sont causés par une zone turbulente à haute altitude, on observe après propagation de l'onde jusqu'au niveau du sol, en plus des déphasages initiaux, des variations du module $A_m(\mathbf{x}, t)$: c'est par exemple le scintillement des étoiles.

Pour une turbulence "non saturée", comme c'est le cas pour une onde plane qui traverse verticalement l'atmosphère par beau temps, il y a peu de variations du module. On peut alors faire l'approximation $A_m(\mathbf{x}, t) = 1$, et on a :

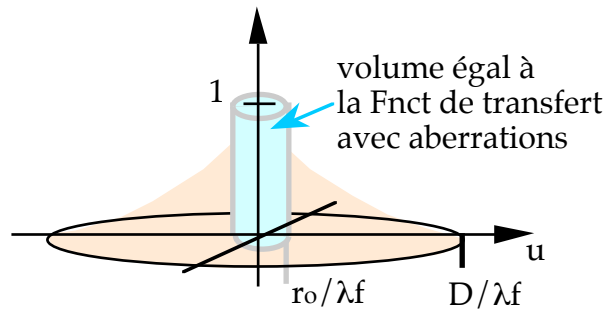
$$\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{u}, t) = \iint D(\mathbf{x}) D(\mathbf{x} - \lambda f \mathbf{u}) \exp [i(\varphi(\mathbf{x}, t) - \varphi(\mathbf{x} - \lambda f \mathbf{u}, t))] d\mathbf{x}$$

$\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{u}, t)$ peut être représentée par le même graphique que $\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{u})$, mais ses valeurs aux fréquences spatiales élevées (supérieures à $d_o/\lambda f$) sont variables en fonction du temps et à moyenne temporelle nulle.

2.6 Rayon de Fried, ou rayon de cohérence de l'atmosphère.

Le rayon de Fried, est défini par r_0 :

$$\text{tel que } \pi r_0^2 / (\lambda f)^2 = \iint \langle \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{u}, t) \rangle_t d\mathbf{u}$$



r_0 est lié au "volume" intégré de la fonction de transfert en pose longue.

Attention, le cylindre en bleu est représenté pour comparaison avec la figure précédente.

Il ne correspond PAS à une fonction de transfert.

Intuitivement, r_0 est le diamètre maximal du télescope qui ne serait pas affecté par la turbulence atmosphérique.

$r_0 = 0,1$ m en moyenne pour le domaine visible : $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$, mais il dépend beaucoup des conditions météo. Un bon mistral donnera un ciel cristallin avec un $r_0 = 0,01$ m, donc de très mauvaises images. Une situation de vent faible au Pic du Midi peut occasionner des r_0 de $0,5$ m.

Pour une situation de turbulence donnée, r_0 dépend de λ selon la relation :

$$r_0(\lambda_1) / r_0(\lambda_2) = (\lambda_1 / \lambda_2)^{6/5}$$

La relation entre r_0 , le diamètre D de l'ouverture et le nombre N de tavelures est :

$$N = 2.3 (D / r_0)^2$$

2.7 Temps de cohérence de l'atmosphère.

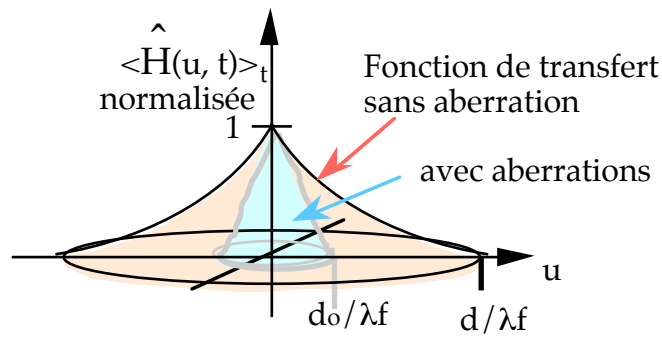
On peut définir τ_0 , le temps de cohérence comme étant le temps maximum pour lequel la différence de phase $\Delta\phi$ entre deux points écartés du fronts d'onde ne change pas de plus de $\pi/2$.

$$\tau_0 = \tau \text{ tel que } \langle |\Delta\phi(t) - \Delta\phi(t + \tau)|^2 \rangle_t < (\pi/2)^2$$

Si l'on fait l'hypothèse que la cause des aberrations est localisée à une altitude donnée et se déplace de manière homogène à la vitesse du vent à cette altitude :

$$\tau_0 \approx r_0 / v \text{ où } v \text{ est la vitesse du vent.}$$

En pose longue, ($t > \tau_0$) la moyenne temporelle $\langle \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{u}, t) \rangle_t$ tend vers 0 quand $\lambda f u > r_0$. La fréquence spatiale transmise la plus élevée est $u_{\max}$ est de l'ordre de $r_0 / \lambda f$.



Fonction de transfert en pose longue avec aberrations,

il n'y a plus aucune transmission des fréquences spatiales au delà de $d_0 / \lambda f$, car les valeurs de la fonction de transfert aux hautes fréquences entre $d_0 / \lambda f$ et $D / \lambda f$ sont à moyenne temporelle nulle. (d_0 est une valeur proche du " r_0 ", le rayon de Fried).

2.7 Rapport de Streilh

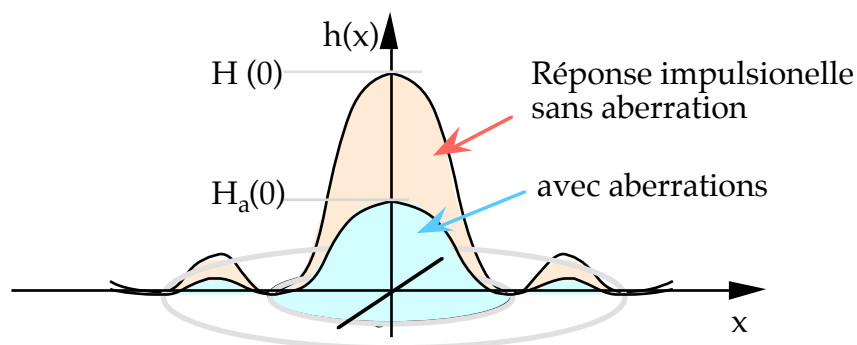
Ce paramètre définit la qualité d'une réponse impulsionnelle :

$$\text{Str} = \iint \hat{H}_a(\mathbf{u}) d\mathbf{u} / \iint \hat{H}(\mathbf{u}) d\mathbf{u}$$

où $\hat{H}_a(\mathbf{u})$ définit la fonction de transfert avec aberrations et $\hat{H}(\mathbf{u})$ la fonction de transfert sans aberrations. Dans les figures de ce chapitre représentant les fonctions de transfert, cela correspond au rapport entre le volume en beige et le volume en bleu. D'après le théorème de Parseval, le rapport de Streilh correspond aussi à :

$$\text{Str} = H_a(0) / H(0)$$

Soit le rapport entre la hauteur du pic central de la réponse impulsionnelle avec aberrations et le pic central de la réponse impulsionnelle sans aberrations.



$$\text{Rapport de Streilh} : \text{Str} = H_a(0) / H(0)$$

Avec une optique et une onde sans défauts, le rapport de Streilh est de 1. Avec une image dégradée par la turbulence sur un grand télescope sans correction par optique adaptative, il peut tomber à 10^{-3} , avec optique adaptative on remonte vers 0,1 à 0,5, exceptionnellement

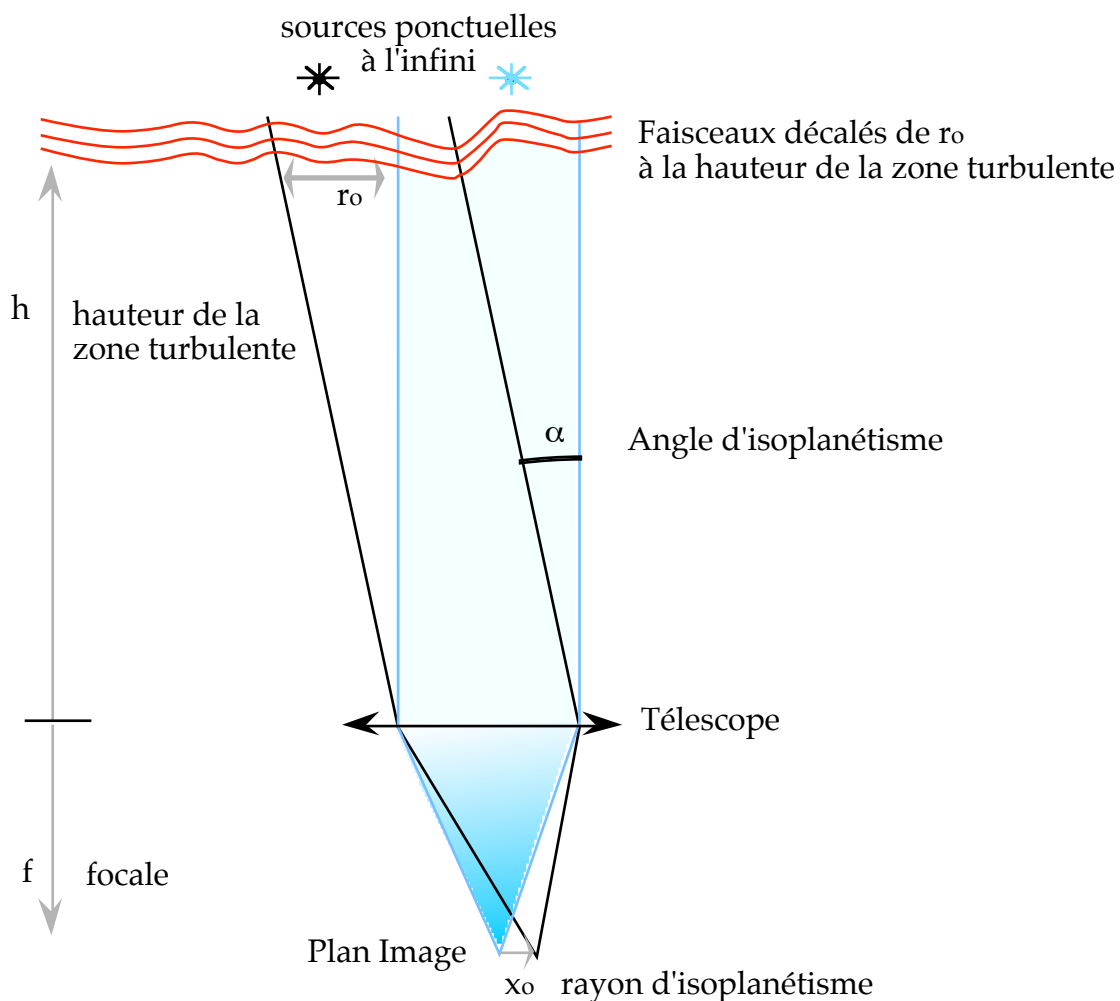
0,9. Le rapport de Streilh est du même ordre de grandeur que r_o^2 / D^2 r_o étant le rayon de cohérence de l'atmosphère et D le diamètre de l'instrument.

2.8 Isoplanétisme

L'isoplanétisme correspond au fait d'avoir la même réponse impulsionnelle $H(x)$ sur tout le champ considéré. La relation de convolution entre objet et image :

$$I(x) = O(x) * H(x)$$

ne tient que si $H(x)$ reste la même fonction pour tout point de l'objet, on appelle cette condition l'isoplanétisme.



Isoplanétisme

Dans ce schéma, les deux images des sources ponctuelles (en bleu ou gris et en noir) sont juste séparées par le rayon d'isoplanétisme. Pour une séparation plus grande, elles ne seraient plus affectées par la même réponse impulsionnelle.

On peut déterminer un champ maximal de rayon x_o pour lequel la stabilité de la fonction de transfert est satisfaisante. C'est le champ d'isoplanétisme. Si l'on fait l'hypothèse que

les perturbations sur l'image sont causées par une seule zone turbulente localisée à une altitude h , on a une relation suivante entre x_0 , champ d'isoplanétisme et r_0 , paramètre de Fried :

$$x_0/f = r_0/h = \alpha .$$

exercice : ciel étoilé

- 1) Calculer le champ angulaire d'isoplanétisme pour $h = 2$ km et $r_0 = 0.2$ m.
- 2) Sachant qu'il faut au moins une étoile ponctuelle de référence par champ d'isoplanétisme, combien en faut il pour couvrir tout le ciel ?
- 3) Calculer l'éclairement minimum d'une source de référence en photons $s^{-1} m^{-2}$ permettant de mesurer le front d'onde par la méthode de Shack-Hartmann. Faites l'hypothèse qu'il faut au moins un photon par zone à mesurer, supposée circulaire de diamètre r_0 , et que la mesure doit être faite en un temps inférieur à $\tau_0 = 2$ ms.
- 4) Y a-t-il assez d'étoiles suffisamment brillantes dans le ciel pour disposer d'une source de référence dans le champ d'isoplanétisme quel que soit le pointage ?

corrigé de l'exercice "ciel étoilé"
 1) $\alpha = r_0/h = 10^{-4}$ radians
 2) Le nombre de sources nécessaire est $N = 4 \cdot \alpha^{-2} \approx 4 \cdot 10^8$
 3) Eclairement $E = D^2 r_0^{-2} \tau_0^{-1} = 8 \cdot 10^5$ photons / s
 4) non, si l'on mesure sur le ciel la densité des étoiles plus brillantes que le seuil trouve dans la question précédente, on trouve qu'il s'en faut d'un facteur 100 environ. On couvre donc 1% du ciel avec l'optique adaptative sans référence artificielle.

3. Optique Adaptative

3.1 Une action préventive.

L'optique adaptative *agit* directement et en temps réel sur le front d'onde, de manière à rendre la réponse impulsionnelle $H(x)$ la plus ponctuelle possible.

On se place comme précédemment dans le cas où il y a relation de convolution :

$$I(x) = [O * H](x)$$

Dans le plan de Fourier cette convolution devient un produit :

$$\hat{\mathbf{I}}(\mathbf{u}) = \hat{\mathbf{O}}(\mathbf{u}) \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{u})$$

On a vu que :

$$\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{u}) = \iint D(\mathbf{x}) D(\mathbf{x} - \lambda f \mathbf{u}) \cdot A(\mathbf{x}) A^*(\mathbf{x} - \lambda f \mathbf{u}) d\mathbf{x}$$

Le but de l'optique adaptative est de se débarrasser des aberrations en remettant à 1 le facteur $A(\mathbf{x}) A^*(\mathbf{x} - \lambda f \mathbf{u})$. La contribution de l'atmosphère $A(\mathbf{x})$ à la fonction de transfert peut se décomposer en phase et module :

$$A(\mathbf{x}) = |A(\mathbf{x})| \exp [i \varphi(\mathbf{x})]$$

C'est sur la phase $\varphi(\mathbf{x})$ que l'on va agir : on introduit dans le faisceau une "correction" de phase $\varphi_c(\mathbf{x})$, ce qui donne après correction :

$$A_{\text{corrigé}}(\mathbf{x}) = |A(\mathbf{x})| \exp i [\varphi(\mathbf{x}) - \varphi_c(\mathbf{x})]$$

On ajuste φ_c de manière à ce que $\varphi(\mathbf{x}) - \varphi_c(\mathbf{x})$ soit le plus petit possible et qu'on tende vers :

$$A_{\text{corrigé}}(\mathbf{x}) = |A(\mathbf{x})| \exp (0) = |A(\mathbf{x})|$$

on a alors :

$$\hat{\mathbf{H}}_{\text{corrigé}}(\mathbf{u}) = \iint D(\mathbf{x}) D(\mathbf{x} - \lambda f \mathbf{u}) \cdot |A(\mathbf{x})| \cdot |A(\mathbf{x} - \lambda f \mathbf{u})| d\mathbf{x}$$

L'intégrande est réel si la correction est parfaite. Les défauts de phase non corrigés, ainsi que fluctuations du module $|A(\mathbf{x})|$ s'il y en a, restent responsables d'un affaiblissement de $\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{u})$ par rapport à la fonction de transfert sans aberration. Le rapport de Strehl de l'image corrigée donne une mesure de la qualité de correction.

Pour mettre en pratique l'optique adaptative il faut deux choses :

- Mesurer les défauts de phase $\varphi(\mathbf{x})$ sur le front d'onde dans le plan pupille.
- Introduire dans le faisceau les corrections $\varphi_c(\mathbf{x})$.

Ces deux opérations doivent être terminées plus rapidement que le temps de cohérence de l'atmosphère : τ_0 , ce qui implique des calculateurs rapides, seulement disponibles à partir des années 1990. Bien que cette technique fût inventée par des astronomes, elle fut développée par les militaires, qui seuls disposaient des budgets nécessaires. Elle s'est maintenant démocratisée mais reste réservée aux grands instruments.

L'optique adaptative ne corrige bien que le front d'onde mesuré, pas un front d'onde en provenance d'une autre direction qui se serait propagé dans un milieu turbulent différent, donnant une fonction de transfert différente. Le champ de la correction est donc a priori limité par le rayon d'isoplanétisme.

Cependant, tout défaut optique peut être corrigé en agissant dans un plan conjugué de celui où il est causé (Schupman, 1999), on peut donc agir dans plusieurs plans proches de la

pupille, correspondant chacun au conjugué d'une couche turbulente en altitude, et obtenir une correction sur un rayon plus grand que l'isoplanétisme. C'est l'optique adaptative Multiconjuguée (MCAO). Il faut mesurer le front d'onde dans ces différents plans simultanément et pour cela disposer de plusieurs sources ponctuelles dans le champ souhaité. Pour corriger plusieurs couches turbulentes, on met un actuateur différent dans chacun des plans conjugués à celles-ci.

Si p est la distance entre une couche turbulente et le télescope, f étant la focale du télescope, il faut mettre l'actuateur correspondant à une distance p' du miroir telle que :

$$p p' = -f^2 .$$

Par exemple, pour une couche turbulente à 2000 m d'altitude avec un télescope de 50 m de focale résultante, il faut placer l'actuateur 1,25 m en aval du foyer.

3.2 Mesure de $\varphi(\mathbf{x})$, dite "mesure du front d'onde".

Il n'est pas possible de remonter à $\varphi(\mathbf{x})$ à partir de l'image d'une source ponctuelle $H(\mathbf{x})$ seul, la relation n'est pas bijective, plusieurs fronts d'onde différents pouvant donner la même réponse impulsionnelle... Il y a plusieurs méthodes pour mesurer le front d'onde et elles impliquent toutes au moins deux mesures de la lumière dans le faisceau, une est décrite ici.

3.2.1 mesure du front d'onde par la méthode de Shack - Hartmann.

On mesure le gradient de $\varphi(\mathbf{x})$ en découpant le front d'onde par un quadrillage, considérant celui-ci comme un assemblage de plans d'inclinaison variable pour chaque maille de ce quadrillage.

On vise une source ponctuelle à l'infini (étoile de référence) et l'on place dans un plan pupille de l'instrument un maillage de petites lentilles contiguës (matrice de micro lentilles). Chaque lentille délimite une zone du front d'onde et le focalise en un point dont on mesure la position.

Le décentrage de l'image donnée par chaque micro lentille fournit localement la pente du front d'onde. On remonte ensuite au front d'onde par intégration des gradients.

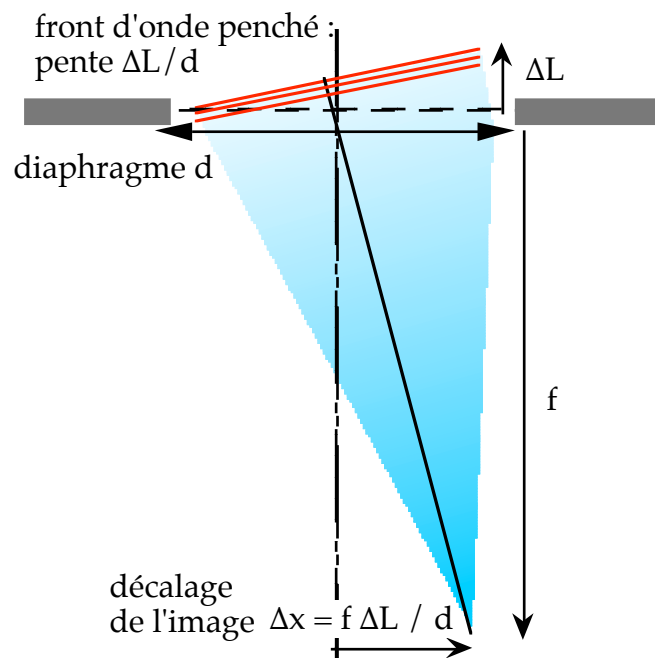
Si l'on assimile le front d'onde à son plan tangent, la différence de chemin optique entre deux points $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}'$ du front d'onde s'exprime par :

$$L(\mathbf{x}') - L(\mathbf{x}) \approx (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{grad} [L(\mathbf{x})]$$

où $\mathbf{grad} [L(\mathbf{x})]$ est le gradient du front d'onde au point $\mathbf{x}$.

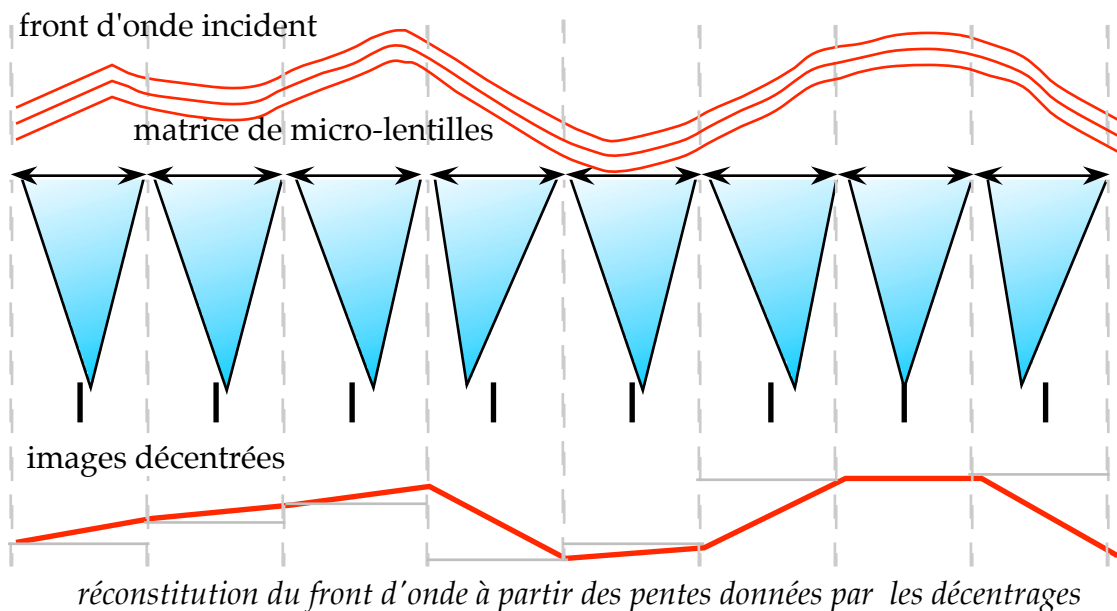
On mesure ce chemin optique, puis on relie la phase au chemin optique par :

$$\varphi = 2\pi \sigma L \quad ; \quad \text{où } \sigma \text{ est le nombre d'ondes : } \sigma \equiv 1 / \lambda.$$



Mesure du chemin optique par méthode de Shack-Hartmann

Une inclinaison du front d'onde cause un déplacement de l'image et permet de retrouver le gradient local



Mesure du chemin optique par méthode de Shack-Hartmann

On relie les différents segments du front d'onde et on intègre les gradients

Pour que le front d'onde puisse être considéré comme plan à l'intérieur d'une zone échantillonnée, il faut que celle-ci soit d'une taille comparable ou inférieure à r_0 . Dans de bonnes conditions $r_0 = 15 \text{ cm}$ pour $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$, et $r_0 = 1 \text{ m}$ dans l'infra-rouge à $\lambda = 2 \mu\text{m}$. Pour que la mesure soit fiable, il faut de plus qu'elle soit faite en un temps court devant τ_0 , le temps de cohérence de l'atmosphère (quelques millisecondes). On dispose donc de peu de photons pour faire la mesure, et cette technique est limitée aux zones du ciel entourant une

ou plusieurs étoiles relativement brillantes (magnitude < 15) pouvant servir de sources pour l'échantillonnage du front d'onde. La magnitude limite de fonctionnement de l'optique adaptative ne dépend pas du diamètre de l'instrument que l'on veut corriger : elle dépend uniquement du "volume" $r_0^2 \tau_0$, c'est à dire des conditions de turbulence.

Exercice : Donner le rapport des flux limites (sensibilité) permettant de reconstruire le front d'onde entre le visible ($\lambda = 0.5 \mu\text{m}$) et l'infrarouge ($\lambda = 2.2 \mu\text{m}$), sachant que r_0 , et τ_0 sont proportionnels à $\lambda^{6/5}$.

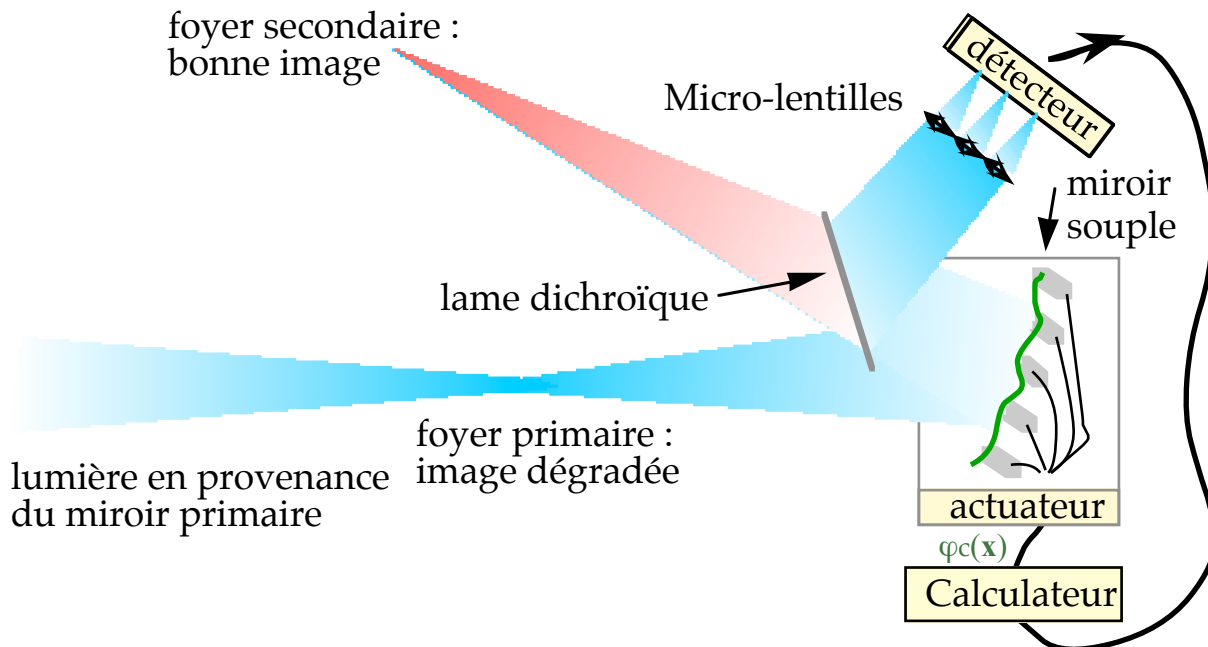
Quel est des deux le domaine de longueur d'onde le plus favorable ?

3.3 Agir sur le front d'onde : les actuateurs

Dans l'expression de base de l'optique adaptative :

$$A_{\text{corrigé}}(\mathbf{x}) = |A(\mathbf{x})| \exp i [\varphi(\mathbf{x}) - \varphi_c(\mathbf{x})]$$

Nous avons vu comment on mesurait $\varphi(\mathbf{x})$. Il reste maintenant à introduire dans le faisceau la correction de phase appropriée : $\varphi_c(\mathbf{x}) = -\varphi(\mathbf{x})$ de manière à annuler les effets de phase introduits par l'atmosphère. On met pour cela un miroir souple dans le faisceau. La surface de ce miroir sera déformée localement à l'aide de supports piézo-électriques et ces déformations introduiront des déphasages égaux à $\varphi_c(\mathbf{x})$. La mise en pratique consiste à asservir l'actuateur sur le front d'onde détecté :



Cette technique Proposée par Babcock (directeur de l'observatoire du Mont Palomar) en 1950 a été utilisée pour la première fois pour l'astronomie en 1993, dans l'infrarouge. Son extension au domaine visible est récente, et plus limitée en magnitude.

On peut utiliser des lasers puissants pour créer artificiellement des sources quasi ponctuelles à haute altitude (80 à 120 km) par rétrodiffusion dans l'atmosphère et ainsi disposer de la lumière nécessaire pour échantillonner le front d'onde en l'absence d'étoile suffisamment brillante dans le champ d'isoplanétisme. Cette technique de "Laser guide star" pose des problèmes de cohabitation avec les autres instruments qui peuvent être gênés par la lumière diffusée. Elle pose aussi les problèmes de sécurité habituels liés aux lasers de très forte puissance. Enfin, elle ne permet pas de corriger les perturbations du front d'onde à basse fréquence spatiale, à moins d'utiliser de puissances encore plus fortes pour créer des effets d'optique non linéaire dans la haute atmosphère, et obtenir une longueur d'onde sur le trajet retour différente de celle sur le trajet aller.

4. Pixels, Resels et Information

4.1 Codage d'une image

Combien faut-il "d'information" pour décrire une image ? On peut associer intuitivement le nombre de pixels (picture elements) d'une image à la quantité d'information qu'elle contient.

Pour connaître la quantité d'information dans une image on est tenté de partir de la quantité d'information par pixel. Par exemple, pour stocker une image de 1000 par 1000 pixels codée sur 24 bits par pixel (16 millions de couleurs), il faut en tout $24 \cdot 10^6$ bits.

Exercice : "damiers"

- 1) Combien d'images différentes peut-il exister, codées en 1000 x 1000 pixels sur 24 bits ?
- 2) En supposant que l'on cherche à les explorer une à une avec un ordinateur hyper-rapide capable d'en analyser 10¹² par seconde, combien de temps cela prendrait-il ?
- 3) Même question, toujours avec cet ordinateur hypothétique, mais en prenant simplement une petite image en noir ou blanc (1 bit par pixel) de 10 x 10 pixels. Comparer la durée de calcul avec l'âge de l'Univers (15 milliards d'années).

Corrigé :

1) Chaque pixel peut prendre 2^{24} valeurs (états) possibles. Comme on suppose que les pixels sont indépendants les uns des autres, le nombre d'états possibles d'un système de 1000*1000 pixels est de

$$N = (2^{24})^{1000 \cdot 1000} = 2^{24 \cdot 10^6} \approx 10^{7 \cdot 200 \cdot 10^3}$$

2) durée de traitement d'une image : $t = 10^{-12}$ s

durée totale : $T = t \cdot N \approx 10^{-12} \cdot 10^{7 \cdot 200 \cdot 10^3}$ s ; on est carrément "hors du temps".

3) avec une image 10*10 sur 1 bit par pixel : $N' = 2^{100} \approx 10^{30}$

durée totale $T' = t N' \approx 10^{30-12} \text{ s} = 10^{18} \text{ s} = 31 \text{ milliards d'années}$, soit deux fois l'âge actuel de l'univers.

On peut estimer de la même façon la durée qu'il faudrait pour "craquer" par force brute une clé informatique codée sur 100 bits.

4.2 Un peu de Théorie de l'Information.

Avec l'exercice précédent, on voit qu'une mesure possible de l'information contenue dans une image est le log à base 2 du nombre d'états différents qu'elle peut prendre. Ici cela correspond au nombre de bits qu'il faut préciser pour définir avec certitude l'un de ces états.

La mesure de l'information contenue dans une image n'est pas toujours aussi simple. Si le "bit" binaire est bien l'unité de mesure de l'information définie par Shannon, l'occupation mémoire d'un image peut être supérieure à la mesure de l'information qu'elle contient.

En supposant que l'on ait une probabilité $P = 1/N$ que l'image vue soit l'une particulière des N possibles, la mesure de l'information s'exprime comme l'entropie en thermodynamique :

$$H = k \ln(N) = k \ln(1/P) = -K \ln(P)$$

avec k une constante positive arbitraire que Shannon a fixé à $1/\ln(2)$, ce qui donne des "bits". Dans ce cas:

$$H = \text{lb}(N) = \ln(N) / \ln 2$$

($\text{lb} = \log$ à base 2) rappel : $\log_a(x) = \ln(x) / \ln(a)$

4.2.1 Entropie d'un système à N états non équiprobables

On a supposé jusqu'ici que les états étaient équiprobables, comme pour l'entropie en thermo, mais c'est rarement le cas en théorie de l'information. Certaines images sont plus probables que d'autres... De même, parmi N séquences possibles de 10 symboles consécutifs tirées de la littérature française ($N \approx 27^{10}$ en prenant 27 symboles différents pour représenter les lettres et l'espace entre les mots), la séquence "o iuywrsdz" est beaucoup moins probable que la moyenne. Question : la probabilité de la séquence "la moyenne" est-elle égale à la moyenne ? (Réponse : non). Parmi l'ensemble des 27 séquences possibles de une lettre ou espace, la fréquence de "e" est plus élevée que celle de "w".

C'est ici que Claude E. Shannon a fait une conjecture fondamentale : Si les N états possibles d'un système ont des probabilités différentes P_e d'être observées, telles que $\sum P_e = 1$, l'information nécessaire pour décrire un état de probabilité P_e vaut :

$$I_e = -k \ln P_e \quad \text{avec } k, \text{ constante positive arbitraire.}$$

L'information nécessaire pour décrire un événement (état du système) est donc d'autant plus élevée que cet événement est rare. Elle est égale à celle apportée par l'observation de cet état, ou événement.

Par exemple, les journalistes ne s'intéressent pas aux trains qui arrivent à l'heure. On illustre ce fait par l'expérience suivante :

Soit un ensemble de 256 boules, dont 255 blanches et une noire. Tirez une boule au hasard, il y a deux cas possibles : soit vous tirez une boule noire, soit vous en tirez une blanche. Le système a donc deux états (événements possibles), leurs probas sont respectivement de $1/256$ et $255/256$. L'événement "tirage d'une boule noire" définit totalement l'état ultérieur du système car il ne restera que des boules blanches. Le tirage d'une boule blanche, plus probable, apportera beaucoup moins d'information.

Propriétés de I_e :

Positivité: $I_e \geq 0$

$I_e = 0$ si l'événement est certain.

Additivité : Des événements indépendants apportent des informations qui s'ajoutent :

$$I_{1 \text{ et } 2} = I_1 + I_2$$

En effet, l'information apportée par l'observation de l'un des deux événements vaut:

$$I(x_1) = -\log P(x_1) \quad \text{ou bien} \quad I(x_2) = -\log P(x_2) .$$

L'information apportée par l'observation des deux événements se déduit de la probabilité conjointe

$$I(x_1, x_2) = -\log P(x_1, x_2) .$$

Si les événements x_1 et x_2 sont indépendants, $P(x_1, x_2) = P(x_1) P(x_2)$, donc

$$I(x_1, x_2) = -\log P(x_1) - \log P(x_2) = I(x_1) + I(x_2) .$$

Généralisation : Soit un état observé avec la probabilité P_e , l'information h_e qu'apporte en moyenne son observation est modulée par sa fréquence d'apparition.

$$h_e = -k P_e \ln P_e$$

On voit que h_e vaut 0 quand $p_e = 0$ et aussi quand $p_e = 1$.

L'information H nécessaire pour décrire complètement un système de N états est obtenue en sommant les contributions individuelles h_e de chacun les états :

$$H = -k \sum P_e \ln P_e$$

Si l'on choisit $k=1/\ln(2)$, on a $H = - \sum P_e \log P_e$

Par exemple, calculons la valeur de H pour deux systèmes :

- un système A à 2 états équiprobables : $P_{a1} = P_{a2} = 1/2$,
- un système B à 2 états pour lequel $P_{b1} = 255/256$ et $P_{b2} = 1/256$.

$$H_a = 1/2 + 1/2 = 1$$

$$H_b = -255/256 \log (255/256) - 1/256 \log (1/256) = 0.00565 + 0.03125 = 0.0369$$

L'état 2 du système B contient 8 fois plus d'information que l'un des états du système A, mais il apporte 32 fois moins d'information en moyenne car il est très rarement observé. Au final, l'information contenue dans, (ou bien: nécessaire pour définir) B est 27 fois plus faible que celle de A.

Le système A pourrait correspondre à un pixel soit blanc soit noir dans une image totalement aléatoire en noir ou blanc, et le système B à un pixel soit blanc soit noir dans cette page de texte : la surface couverte par l'encre noire étant beaucoup plus petite que celle restée blanche, la probabilité qu'un pixel soit noir est faible.

Pour des états équiprobables ($P_e = 1/N$), on retrouve bien la première expression :

$$H = -k \sum (1/N) \log (1/N) = k \log N$$

Exercice : *Entropie thermodynamique et entropie de Shannon.*

En thermo, l'entropie s'exprime par $S = K_b \ln \Omega$,

En théorie de l'info, l'entropie par $H = \text{lb } \Omega$.

Quel est la valeur d'une unité d'entropie "thermo" exprimée en bits ?

On donne : constante de Boltzmann : $K_b = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$

Corrigé

$$H = S / (K_b \ln 2) \quad \text{car} \quad \text{lb } x = \ln x / \ln 2$$

$$H = 1,046 \cdot 10^{23} S$$

Un Joule par Kelvin (unité d'entropie thermodynamique) correspond à 10²³ bits environ.

Réflexions ...

y a-t-il une raison physique pour que cette quantité soit commensurable avec le nombre d'Avogadro ?
(relation entre macroscopique et atomique).

Peut-on exprimer le nombre de bits par atome à une température donnée ? Quelle serait la relation avec les états d'énergie dans un atome ?

Parmi les mémoires suivantes, laquelle est la plus compacte en bits par kg :

- livre
- DVD
- chip RAM de 1 Gigabit
- synapse de neurone
- ADN (voir exercice suivant)

Comment évaluer la limite théorique à la capacité d'une mémoire ?

Exercice : *Mémoire à ADN*

Les généticiens parlent en "nombre de "bases" ADN. Sachant qu'une base ADN peut prendre 4 valeurs différentes (A,G,C,U), si l'on prend comme mesure de l'information contenue dans un code génétique le nombre de bases ADN, quelle est la constante k à laquelle cela correspond dans la formule :

$$G = k \text{ lb } (N) \quad ?$$

où : G est la mesure d'information génétique en nombre de bases ADN,

N est le nombre d'états possibles d'un système à G bases ADN.

Corrigé :

Un code génétique de G bases a $N = 4^G$ états possibles.

Si l'on prend comme mesure de l'information G le nombre de bases, on a

$$G = \log_4(N)$$

D'autre part, si l'on applique la formule

$$G = k \text{ lb}(N)$$

on trouve

$$k = \log_4(N) / \log_2(N)$$

$$k = \ln 2 / \ln 4$$

$$k = 0,5.$$

On retrouve ce résultat intuitivement car une base (ou codon) ADN peut prendre 4 valeurs, donc vaut 2 bits.

Réflexions ...

Qu'est-ce qui contient le plus d'information dans le corps humain : le cerveau ou le code génétique ?
(la réponse "Ça dépend qui" n'est pas valable)

Exercice : l'esprit frappeur...

Lors d'une séance de spiritisme, une voyante met en relation ses clients avec les esprits en utilisant le code suivant: un coup pour A, deux coups pour B, trois coups pour C, etc... jusqu'à Z, avec une seconde de silence pour séparer les lettres, soit:

A -> 10

B -> 110

C -> 1110

.....

Z -> 1111111111111111111111111110

L'esprit frappe un coup par seconde et la voyante facture ses consultations au temps passé.

- 1) Quel est le nombre moyen de bits par symbole avec le code utilisé ?
- 2) En prenant une probabilité uniforme pour toutes les lettres de l'alphabet dans les messages transmis, quelle est l'entropie de la source ? (en fait l'esprit s'appelle Zyquywkxyzz, mais on n'en tiendra pas compte).
- 3) Trouvez un système de codage meilleur. Donnez un exemple et expliquez pourquoi il serait plus efficace.
- 4) (question carrément hors sujet) Comment seriez-vous reçu par la voyante si vous lui proposiez d'adopter ce meilleur codage ?

corrigé

1) Nombre moyen de bits par symbole avec le code utilisé :

$$(2+3+\dots+27)/26 = 29/2 = 14,5$$

2) Entropie de la source : $\text{lb}(27) = 4,75$

3) Exemple de codage meilleur

binnaire sur 5 bits: A->0001 ; B->0010 ; C->0011 ; D->0100 ; E->0101 etc.

On a alors 5 bits par symbole, ce qui se rapproche de l'entropie de la source.

4) Faites gaffe au chat noir, il griffe *@!!

4.3 Dynamique, signal sur bruit, et Information apportée par une mesure

Supposons qu'on fasse une mesure physique : par exemple l'intensité lumineuse I en un point. A priori le nombre d'états possibles est infini car l'intensité peut prendre n'importe quelle valeur, mais après la mesure il sera forcément limité par le niveau de saturation de l'appareil de mesure ($I_{\max}$) et l'incertitude absolue sur cette mesure (ΔI). On peut définir la dynamique d'une mesure comme étant le rapport $I_{\max} / \Delta I$. Cette définition n'est pas équivalente à celle du rapport signal sur bruit : $I_{\text{mesuré}} / \Delta I$, mais en est proche.

Le nombre N d'états indépendants que peut prendre cette mesure correspond à la dynamique : $I_{\max} / \Delta I$

Si les états sont équiprobables, en assimilant l'information H à celle définie par Shannon on a pour la mesure d'intensité en un point, on a :

$$H = \text{lb} (I_{\max} / \Delta I) .$$

4.4 Information dans une image

On a vu que si des mesures sont indépendantes, l'information qu'elles apportent s'ajoute. A contrario, l'information de mesures qui ne sont pas indépendantes ne s'ajoute pas.

Par exemple, pour une image limitée par la diffraction, et déjà correctement échantillonnée par une maille de 100x100 pixels, l'information sera la même si on la rééchantillonne dans une maille de 1000x1000 pixels. En effet, à cause de la diffraction il y aura une probabilité nulle que deux pixels côte à côte contiennent des intensités fortement différentes : les états ne sont plus équiprobables.

Dans ce cas ce n'est pas la finesse de l'échantillonnage (nombre de pixels) qui détermine l'information contenue dans une image, mais le nombre d'éléments indépendants, appelés éléments de résolution ou "resels". Un élément de résolution a la surface d'une réponse impulsionnelle, d'où le nombre de resels dans une image obtenue avec un télescope est:

$$N_{\text{resels}} = (\text{champ} / \text{résolution})^2$$

La quantité d'information apportée par la connaissance d'un resel vaut, comme on vient de le voir pour une mesure au paragraphe précédent :

$$H_{\text{resel}} = \text{lb} (I_{\max} / \Delta I)$$

où $(I_{\max} / \Delta I)$ est la dynamique de ce resel.

Dans le cas d'une dynamique uniforme pour tous les resels de l'image, l'information apportée par l'observation de toute l'image vaut:

$$H_{\text{image}} = \text{lb} (I_{\max} / \Delta I) N_{\text{resels}}$$

$$H_{\text{image}} = [\text{lb}(I_{\max} / \Delta I)] (\text{champ} / \text{résolution})^2$$

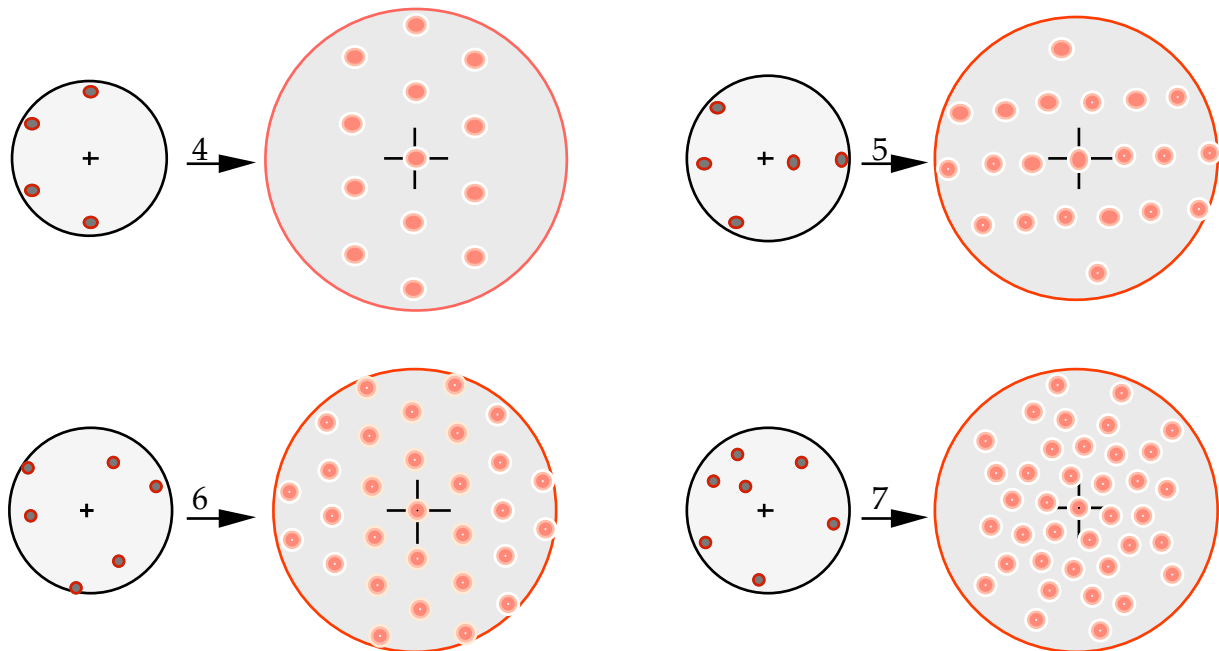
5. Synthèse d'ouverture

La synthèse d'ouverture consiste à pointer plusieurs télescopes sur le même objet et recombinaison (faire interférer) les faisceaux entre eux. Le réseau de télescopes se comporte alors comme un seul miroir (ouverture) devant lequel on aurait placé un diaphragme percé d'autant de trous qu'il y a de télescopes. Un réseau interférométrique a potentiellement la résolution d'une ouverture qui engloberait tout le groupe de télescopes. On arrive à des résolutions de quelques micro secondes d'arc.

Dans les domaines optique et IR, pour connaître $\hat{\mathbf{I}}(\mathbf{u})$ on analyse les figures d'interférences formées par les faisceaux recombinaison. On est obligé de recombinaison optiquement les faisceaux avant détection car celle-ci fait perdre la phase de l'onde (dans ce domaine de fréquences on ne mesure que l'intensité, c'est à dire le module carré de l'onde).

En radio-astronomie, pour calculer $\hat{\mathbf{I}}(\mathbf{u})$ on intercorrèle électroniquement les signaux des différentes antennes, qui donnent chacun l'amplitude complexe de l'onde $\Psi_p(\mathbf{x}_i)$ où $\mathbf{x}_i$ est la position de l'antenne (c'est une position dans le plan pupille). La détection peut donc se faire avant recombinaison des faisceaux car dans ce domaine de fréquences (voir premier exercice du poly) elle ne fait pas perdre la phase de l'onde.

On peut faire de l'interférométrie dans quasi tous les domaines de longueur d'onde (radio à U.V.). Les distances entre télescopes sont appelées bases, la base maximale (plus grande distance séparant deux télescopes du groupe) correspond à la fréquence spatiale maximale $\mathbf{u}_{\max}$ pour laquelle la fonction de transfert du réseau : $\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{u})$ n'est pas nulle. C'est l'équivalent de la fréquence de coupure pour une ouverture pleine.



Exemples de dispositions optimisées de télescopes (points dans les cercles de gauche) et leur fonction de transfert associée (échantillonnage dans le plan de Fourier : points rouges dans les cercles de diamètre double) pour respectivement 4, 5, 6 et 7 télescopes. La disposition régulière de zones échantillonnées dans le plan de Fourier est le résultat de délicates optimisations algorithmiques des positions des télescopes, qui eux ne sont pas placés de façon équidistante.

5.1 Performances de l'interférométrie

Un réseau de télescopes vise à remplacer mais n'est pas équivalent à une ouverture pleine ayant la même fréquence de coupure. On a bien la relation :

$$\hat{I}(\mathbf{u}) = \hat{O}(\mathbf{u}) \hat{H}(\mathbf{u}),$$

mais à la différence de la fonction de transfert d'une ouverture pleine, $\hat{H}(\mathbf{u})$ est nulle partout sauf en quelques zones du plan de Fourier, voyez la figure ci dessus avec 4, 5, 6, et 7 télescopes répartis dans un terrain circulaire. Les zones où la TF de l'objet est mesurable dans le plan de Fourier sont les parties non nulles de $\hat{H}(\mathbf{u})$.

La dégradation que fait subir un interféromètre aux images est différente de celle causée par l'atmosphère. Il fait reconstituer $O(\mathbf{x})$ à partir d'une connaissance fragmentaire de sa transformée de Fourier $\hat{O}(\mathbf{u})$, qui n'est connue que dans les zones où $\hat{H}(\mathbf{u})$ n'est pas nulle.

On "interpole" $\hat{O}(\mathbf{u})$ par des techniques de reconstruction d'image (Clean, Wipe, minimum d'entropie) et on "synthétise" une ouverture pleine, celle correspondant par exemple au disque englobant l'ensemble des télescopes, mais on peut choisir une fréquence de coupure plus petite.

Une limitation vient du petit nombre de points échantillonnés sur $\hat{O}(\mathbf{u})$: avec N ouvertures, on a $N.(N-1)$ zones échantillonnées dans le plan de Fourier donnant (hors les sy-

métries) $N.(N-1)/2$ mesures du module de $\hat{\mathbf{O}}(\mathbf{u})$. En ajoutant les $(N-1)(N-2)/2$ mesures sur les clôtures de phases, le nombre total de mesures indépendantes sur $\hat{\mathbf{O}}(\mathbf{u})$ vaut :

$$N.(N-1)/2 + (N-1)(N-2)/2 = (N-1)^2$$

En supposant la même dynamique ($\hat{\mathbf{O}}_{\max}/\Delta\hat{\mathbf{O}}$) pour toutes les mesures, l'information associée à l'ensemble des mesures faite avec une configuration de télescopes correspond à :

$$H_{\text{mesures}} = (N-1)^2 \text{ lb} (\hat{\mathbf{O}}_{\max}/\Delta\hat{\mathbf{O}})$$

Si l'on fait n_{obs} observations indépendantes du même objet (on espère qu'il ne change pas de forme entre les observations) en variant les bases, on a :

$$H_{\text{mesures}} = n_{\text{obs}} (N-1)^2 \text{ lb} (\hat{\mathbf{O}}_{\max}/\Delta\hat{\mathbf{O}})$$

A partir de cette information on reconstruit numériquement une image $O(\mathbf{x})$. Le processus de reconstruction n'ajoute pas d'information, sauf si on fait des hypothèses sur l'objet (modèle théorique). On a donc après reconstruction de l'image :

$$H_{\text{image}} \leq n_{\text{obs}} (N-1)^2 \text{ lb} (\hat{\mathbf{O}}_{\max}/\Delta\hat{\mathbf{O}})$$

Les algorithmes de reconstruction permettent de choisir explicitement l'ouverture synthétisée, donc la résolution. Par contre un nombre maximum de resels sera imposé par la quantité d'information disponible.

On a vu que l'information associée à une image s'exprime :

$$H_{\text{image}} = [\text{lb}(I_{\max}/\Delta I)] (\text{champ} / \text{résolution})^2$$

$(I_{\max}/\Delta I)$ étant la dynamique de cette image.

De ces deux expressions différentes de H_{image} on déduit la relation :

$$(\text{champ} / \text{résolution})^2 \leq n_{\text{obs}} (N-1)^2 \text{ lb} (\hat{\mathbf{O}}_{\max}/\Delta\hat{\mathbf{O}}) / [\text{lb}(I_{\max}/\Delta I)]$$

Dans la pratique, si on cherche à reconstruire une image avec un rapport (champ/résolution) trop grand, donc contenant une quantité d'information supérieure à celle des mesures, l'image reconstruite sera "instable": la moindre erreur sur les données $\hat{\mathbf{O}}(\mathbf{u})$ causera des variations aléatoires très grandes de l'image reconstruite $O(\mathbf{x})$.

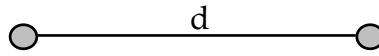
En prenant la même dynamique dans l'image reconstruite que dans les données, le nombre de resels doit être égal au nombre de paramètres mesurés par l'interféromètre. Par exemple avec 10 télescopes on a 81 mesures (bases plus clôtures) et il ne faut pas chercher à reconstruire une image plus grande que 9 par 9, sauf si l'on n'a des informations par ailleurs sur l'objet.

La taille angulaire d'un resel de l'image reconstruite (la résolution) une fois choisie lors de la phase de reconstruction, c'est le champ angulaire total qui est limité par le nombre d'ouvertures. Si l'objet observé est plus grand que ce champ, on ne pourra pas reconstruire

son image sauf dans les cas particuliers où celle-ci contient peu d'information (par exemple étoile triple vue comme trois points sur fond noir).

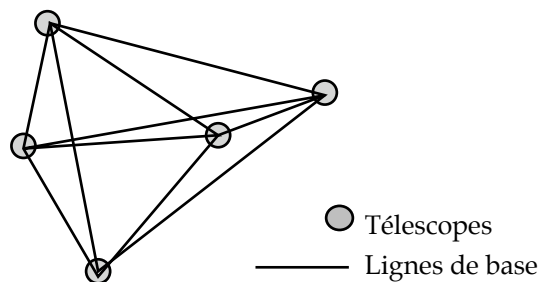
Problème: le dilemme “champ - résolution” avec un interféromètre

1) On dispose d'un interféromètre à deux télescopes :



Si les télescopes sont de diamètre très petit comparé à la distance d qui les sépare on les considère comme ponctuels. Combien y a-t-il alors de points non nuls dans la fonction de transfert de cet interféromètre ? Parmi ces points non nuls, combien transmettent de l'information à haute résolution angulaire ? Combien en reste-t-il dans un demi-plan ?

2) On dispose maintenant de plusieurs télescopes. Pour faire un interféromètre on relie optiquement chacun d'eux à l'ensemble des autres, comme dans la schéma dessous (ce n'est pas un dessin 3D, les télescopes sont tous dans le même plan).



Combien au maximum peut-on faire de lignes de bases si l'on dispose de N télescopes dans une configuration donnée ?

On considère les télescopes individuels comme ponctuels. Combien y a-t-il de points non nuls (hors fréquence zéro) dans un demi-plan de la fonction de transfert ? En déduire le nombre de mesures indépendantes sur le module de TF d'un objet observé.

3) Pour un interféromètre à N télescopes ponctuels, le nombre de mesures sur la clôture de phase de la TF d'un objet est $(N-1)(N-2)/2$. Quel est le nombre total de mesures (phase et module) ? On suppose une dynamique de 256 pour chaque mesure de visibilité ou clôture. En déduire la quantité d'information (en bits) disponible pour reconstruire l'image.

4) En supposant qu'on impose une dynamique de 256 dans l'image reconstruite, quel sera le nombre maximal de resels ?

5) La base la plus longue de l'interféromètre a 200 m et on utilise une longueur d'onde $\lambda = 2,2 \mu\text{m}$. Quelle est la résolution angulaire associée à cette base ?

6) On fixe la taille d'un resel de l'image reconstruite à résolution maximale de l'interféromètre. Donner l'expression du champ. Donner une valeur en secondes d'arc pour 5 télescopes.

Corrigé

1) trois points non nuls,
deux à une fréquence différente de la fréquence zéro,
1 par demi plan.

2) $N(N-1)/2$ bases, même nb de points non nuls dans le demi plan de Fourier.

3) Le nombre total de mesures est $N(N-1)/2 + (N-1)(N-2)/2 = (N-1)^2$
L'information correspondante vaut $8(N-1)^2$ bits

4) nb max. de resels : $(N-1)^2$

5) $2.2 \cdot 10^{-6} / 200 = 1.1 \cdot 10^{-8}$ radians = $2.2 \cdot 10^{-3}$ "

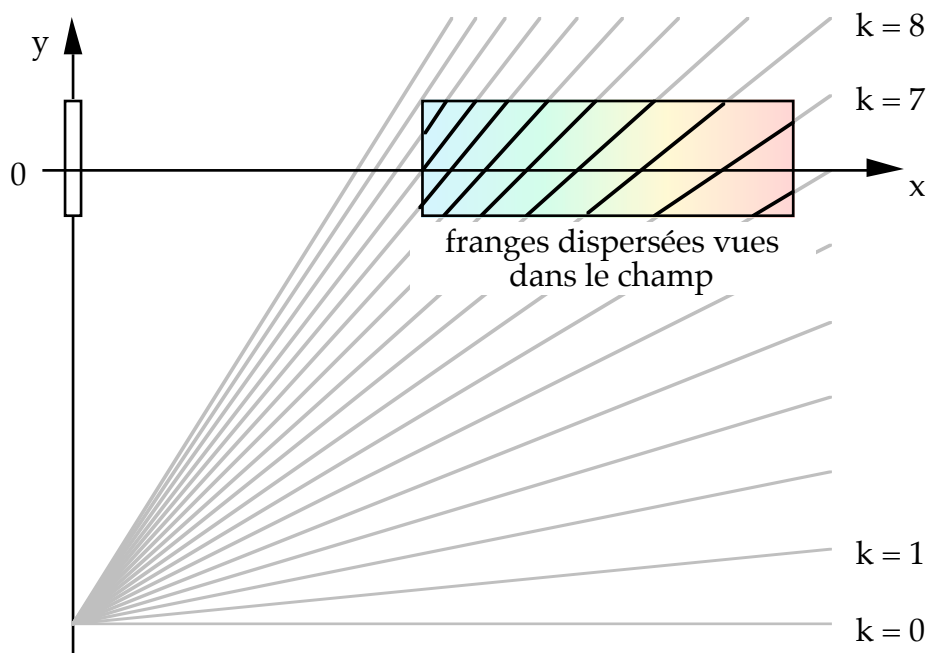
6) champ $(N-1) \cdot 2.2 \cdot 10^{-3}$ "

Pour $N = 5$, champ = $9 \text{ m}'' \times 9 \text{ m}''$

5.2 Contraintes sur la mise en oeuvre des interféromètres

Contraintes de différence de marche optique

La longueur de cohérence spectrale est un paramètre important. On ne peut faire de mesures que si la condition de cohérence spectrale est satisfaite: la différence de marche optique entre les faisceaux passant par les différents télescopes doit être inférieure à la longueur de cohérence $L_c = \lambda^2 / \Delta\lambda$. Une large bande spectrale donnant une longueur de cohérence de $1\mu\text{m}$ impose des contraintes quasi impossibles à satisfaire sur le positionnement des télescopes. Pour augmenter L_c on peut réduire la bande passante $\Delta\lambda$ mais alors on limite la luminosité.



Pour accroître L_c sans pour autant réduire $\Delta\lambda$, Michelson (ou peut être déjà Fizeau) avait trouvé un procédé : disperser l'image des franges, ce qui consiste à observer simultanément dans plusieurs bandes passantes étroites adjacentes. Les franges ont alors l'aspect de la figure ci-dessus.

Contraintes de superposition des images

Le pointage des différents télescopes du réseau doit être le même avec comme tolérance la tache d'Airy ou la tache d'aberration de chaque ouverture indépendante. Une mauvaise superposition, rajoute des erreurs sur la mesure de visibilité.

Qualité de la réponse impulsionnelle des petites ouvertures

Si les images sont étalées par l'atmosphère, la luminosité sera divisée par un facteur

$$\text{Str } \tau_0 / t$$

τ_0 est le temps de cohérence de l'atmosphère, t le temps d'observation, Str le rapport de Streilh.

Le rapport de Streilh est du même ordre de grandeur que r_0^2 / D^2 ; r_0 étant le rayon de cohérence de l'atmosphère et D le diamètre de l'instrument. En supposant $D = 8\text{m}$, $r_0 = 1\text{m}$, $\tau_0 = 0,02\text{ s}$, $t = 1\text{s}$, on a une baisse de sensibilité d'un facteur 3200. L'optique adaptative sur chaque ouverture s'impose.

5.3 Limitation du champ des interféromètres

Avec un réseau interférométrique de N télescopes, on mesure pour chaque base une valeur de la TF de l'objet $\hat{O}$ d'une valeur maximale mesurable $\hat{O}_{\max}$ et avec une précision $\Delta\hat{O}$. La dynamique d'une mesure vaut $\hat{O}_{\max} / \Delta\hat{O}$. La quantité d'information H_{base} apportée par une base ou une clôture de phase est :

$$H_{\text{base}} = \text{lb}(\hat{O}_{\max} / \Delta\hat{O}) .$$

Pour N télescopes supposés ponctuels on a $N(N-1)/2$ bases et $(N-1)(N-2)/2$ clôtures, soit au total $(N-1)^2$ mesures. Si les informations données par chacune de ces mesures sont indépendantes, elles vont s'ajouter, si elles ne le sont pas, la quantité d'information totale sera inférieure. L'information apportée par l'ensemble de ces $(N-1)^2$ mesures est donc exprimée par l'inégalité :

$$H_{\text{obs}} \leq (N-1)^2 \text{ lb}(\hat{O}_{\max} / \Delta\hat{O}) .$$

Si l'on fait $N_{\text{observations}}$ indépendantes (par exemple en modifiant les bases entre chaque observation pour améliorer l'échantillonnage dans le plan de Fourier) on a comme information totale :

$$H_{\text{obs}} \leq (N-1)^2 \text{ lb}(\hat{O}_{\max} / \Delta\hat{O}) N_{\text{observations}}$$

Par ailleurs, une image couvrant un champ donné avec une résolution angulaire donnée contient un nombre d'éléments de résolution (resels) égal à

$$N_{\text{resels}} = (\text{champ} / \text{resolution})^2$$

la quantité d'information H_{image} nécessaire pour reconstruire une image de N_{resels} éléments de résolution, chacun de dynamique $I_{\max} / \Delta I$ est donc :

$$H_{\text{image}} = \text{lb}(I_{\text{max}}/\Delta I) \quad N_{\text{resels}} = \text{lb}(I_{\text{max}}/\Delta I) \quad (\text{champ}/\text{resolution})^2$$

L'information nécessaire pour reconstruire l'image venant des mesures, et le processus de calcul de l'image ne pouvant par lui-même ajouter de l'information sur l'objet observé, on en déduit l'inégalité :

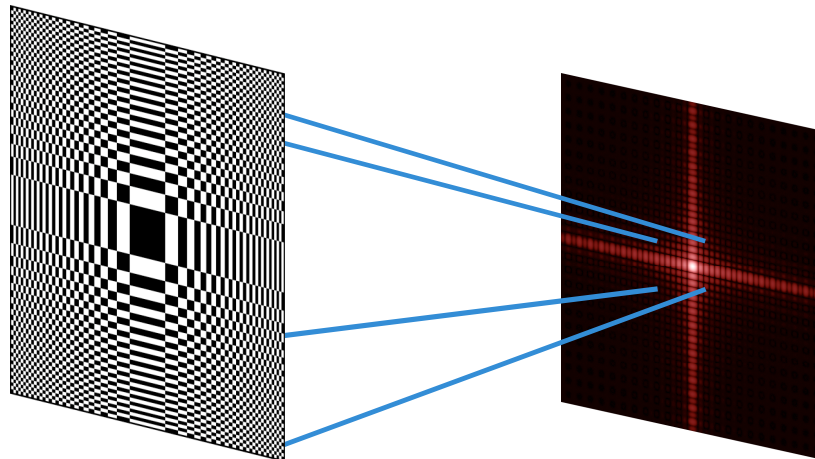
$$H_{\text{image}} \leq H_{\text{obs}}$$

En remplaçant H_{image} et H_{obs} par leurs expressions respectives, on en déduit une inégalité imposant un nombre minimum d'ouvertures indépendantes pour obtenir des images d'un champ donné avec le réseau interférométrique, si on se contente de la même dynamique dans l'image reconstruite que dans les mesures :

$$\text{champ}/\text{resolution} \leq (N-1) \sqrt{N_{\text{observations}}}$$

Cette limitation ne dépend ni de l'objet observé, ni du mode d'observation. Elle donne un champ maximum de quelques resels (pixels) pour les réseaux interférométriques existants dans le visible (champ de 7 par 7 pour le VLTI par exemple).

Une solution possible pour augmenter le nombre d'ouvertures dans le visible est la focalisation par diffraction, permettant la recombinaison de dizaines ou centaines de milliers d'ouvertures : voici un exemple de grille de Fresnel et la figure de diffraction qu'elle donne.



Lectures conseillées et ouvrages dont je me suis servi (entre autres) pour faire ce poly :

- "Statistical optics" auteur : Joseph W. Goodman ; Éditeur : Wiley Interscience.
- "Optique géométrique et ondulatoire" auteur : José-Philippe Perez, Ed. Masson.
- pour l'optique adaptative : "Improving the resolution of ground-based telescopes", article de 69 pages dans "Review of Modern Physics", avril 1997, vol 69 n°2 p.437 à 505. Auteurs : Roggeman, Welsh, Fugate.