

Sujet de stage :	Algorithmes de type <i>Branch-and-Bound</i> pour l'optimisation parcimonieuse en traitement du signal
Mots-clés :	Parcimonie, problèmes inverses, optimisation combinatoire, branch-and-bound
Localisation :	IRCCyN, École Centrale de Nantes
Encadrement :	Sébastien Bourguignon, Maître de Conférences, École Centrale de Nantes Jordan Ninin, Enseignant-Chercheur, ENSTA-Bretagne, Brest
Durée :	5 à 6 mois
Gratification :	environ 550 € mensuels
Poursuite en thèse :	à discuter

L'approximation parcimonieuse consiste à rechercher, sous un modèle $\mathbf{y} \simeq \mathbf{A}\mathbf{x}$, une solution $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^K$ avec un grand nombre de composantes nulles, approchant des données $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$, avec en général $K < N$. Un exemple dans le domaine des problèmes inverses est celui de la déconvolution impulsionnelle, où l'opérateur \mathbf{A} correspond à une opération de filtrage, de type passe-bas ou passe-bande, d'un train d'impulsions \mathbf{x} par un instrument de mesure [1]. La résolution de ce problème peut être décrite par la minimisation du nombre de coefficients non nuls de \mathbf{x} (la « norme » ℓ_0) sous contrainte d'une borne sur l'erreur d'approximation :

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_0 \text{ avec } \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 < \epsilon. \quad (1)$$

Ce problème d'optimisation relève essentiellement du domaine combinatoire, dans un espace dont la taille croît exponentiellement avec le nombre d'inconnues – il y a 2^K combinaisons différentes pour les valeurs non nulles de \mathbf{x} –, rendant souvent inenvisageable l'exploration exhaustive de l'espace des solutions.

En traitement du signal, ce problème est désormais très courant et généralement abordé par la construction de stratégies d'optimisation sous-optimales, mais efficaces en coût de calcul. De nombreuses méthodes ont ainsi été développées au cours des quinze dernières années, reposant sur la construction de stratégies heuristiques d'optimisation locale, permettant d'explorer des parties privilégiées de l'ensemble de la combinatoire.

Dans le cas de problèmes inverses de taille modérée, des travaux récents [2] ont cependant montré que la solution *globale* du problème d'optimisation peut effectivement être calculée à partir d'algorithmes de type *Branch-and-bound*, issus du domaine de la recherche opérationnelle [3]. Les optima ainsi obtenus fournissent alors de meilleures solutions que les méthodes sous-optimales existantes, au prix d'un coût de calcul bien plus élevé. Ces algorithmes reposent sur la définition d'un arbre de décision binaire pour chaque variable (nulle ou non nulle ?). Une exploration totale de l'arbre est alors mise en œuvre, reposant sur la construction de relaxations efficaces permettant d'élaguer des branches importantes de l'arbre de décision sans recourir à leur énumération explicite.

Jusqu'à présent, la mise en œuvre de tels algorithmes s'effectue cependant au moyen de *solveurs* génériques (CPLEX), qui sont globalement « aveugles » vis-à-vis des spécificités du problème initialement formulé, à l'inverse des méthodes heuristiques sus-mentionnées, spécifiquement dédiées au problème (1). L'objectif de ce stage est donc d'étudier la prise en compte, dans des algorithmes de type *Branch-and-bound*, de stratégies d'exploration combinatoire issues des développements spécifiques au problème d'optimisation parcimonieuse en traitement du signal.

Le travail attendu repose sur des compétences en traitement du signal, en optimisation et en programmation informatique.

Références

- [1] J Idier, Ed., *Approche bayésienne pour les problèmes inverses*, Traité IC2, Série traitement du signal et de l'image, Hermès, Paris, 2001.
- [2] S Bourguignon, J Ninin, H Carfantan, and M Mongeau, "Exact sparse approximation problems via mixed-integer programming : formulations and computational performance," *accepté pour publication, IEEE Transactions on Signal Processing*, 2015.
- [3] A Lodi, "Mixed integer programming computation," in *50 Years of Integer Programming 1958-2008*, Michael Junger *et al.*, Ed., pp. 619–645. Springer Berlin Heidelberg, 2010.