

**Travaux dirigés - L3 PIE**  
 Traitement Numérique du Signal

Exercice n°1 : Soit le signal  $x(t) = 3 \cdot \cos(100 \cdot \Pi \cdot t)$

1. Calculez la valeur des échantillons de  $x(t)$  si la fréquence d'échantillonnage choisie est  $F_e = 75\text{Hz}$ . Dessinez un graphe présentant les échantillons en fonction du temps.
2. Même question pour  $F_e = 200\text{Hz}$ .
3. Déterminez la fréquence minimale d'échantillonnage permettant d'éviter le repliement de spectre. Expliquez pourquoi la suite obtenue à la première question peut correspondre à une sinusoïde de fréquence  $f < \frac{F_e}{2}$ . Quelle est cette fréquence?

Exercice n°2 : L'échantillonnage a été présenté en cours comme la multiplication du signal à échantillonner par un peigne de Dirac. Cette approche permet d'établir les résultats théorique. Il existe plusieurs variantes en pratique :

L'échantillonnage naturel consiste à multiplier le signal  $x(t)$  à spectre borné sur  $[-F_M, +F_M]$  par un train d'impulsions  $r(t)$  rectangulaires de hauteur  $\frac{1}{\tau}$ , de largeur  $\tau$  et de période  $T_e = \frac{1}{2F_M}$  :

$$x_e(t) = x(t) \frac{1}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Pi_{\tau}(t - n T_e)$$

- 1) En considérant que ce train d'impulsions  $r(t)$  est issu du produit de convolution par une peigne de Dirac, calculez sa transformée de Fourier  $R(f)$ .
- 2) En déduire l'expression de la transformée de Fourier du signal  $x_e(t)$  correspondant à l'échantillonnage naturel de  $x(t)$ .
- 3) Illustrez sur un schéma la représentation fréquentielle du signal échantillonné.
- 4) Est-il alors possible de reconstruire le signal  $x(t)$  sans déformations?
- 5) Comment est affecté le spectre de  $x_e(t)$  si l'on utilise un train d'impulsions triangulaires plutôt que rectangulaires.

Exercice n°3 : L'exercice porte sur l'observation d'un signal sinusoïdal observé pendant une durée finie.

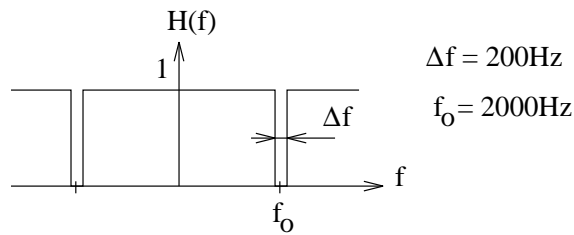
1. Dessinez le spectre du signal :  $x_R(t) = \cos(2\pi f_o t) \Pi_{\Delta T}(t)$
2. Dessinez le spectre de la fenêtre de pondération de Hanning définie par :  
 $w_H(t) = \left(0,5 + 0,5 \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta T} t\right)\right) \Pi_{\Delta T}(t)$
3. Pour les fenêtres de pondération, Rectangulaire et Hanning, déterminez :
  - La fréquence correspondant au premier passage à zéro.
  - La valeur du rapport entre l'amplitude du premier lobe secondaire et l'amplitude du lobe principal.

Concluez sur l'influence de ces deux paramètres.

Exercice n°6 : Synthèse de filtre RIF : Méthode des fenêtres de pondération.

Lors d'une manipulation, nous disposons d'un signal acoustique, occupant la bande de fréquence 20Hz-4kHz, mélangé à une sinusoïde de fréquence 2kHz. Afin d'améliorer les conditions d'écoute, on désire atténuer la sinusoïde au maximum.

Pour cela, on désire synthétiser le filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF) suivant en utilisant la méthode des fenêtres de pondération. La fréquence d'échantillonnage choisie est  $F_e = 16kHz$ .



1. Tracez la réponse impulsionnelle idéale.
  2. Donnez l'expression générale de  $H(z)$  pour une pondération par une fenêtre rectangulaire dans le cas d'un filtre d'ordre pair (Nombre de coefficients impair). Proposez une solution pour rendre le filtre causal.
  3. Donnez l'expression générale des coefficients pour une pondération par une fenêtre de Hamming.  $w[n] = 0.54 + 0.46 \cdot \cos(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{N-1})$  avec  $-\frac{N-1}{2} \leq n \leq +\frac{N-1}{2}$
-

## Différentes formes de la transformée de Fourier

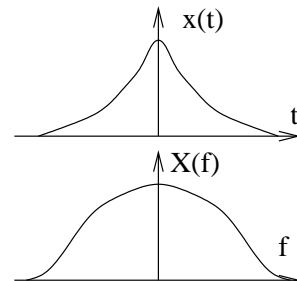
### I) Fonction continue (Transformée de Fourier)

Temps : Fonction a périodique et continue.

Fréquence : Fonction a périodique et continue.

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{+j2\pi f t} df$$



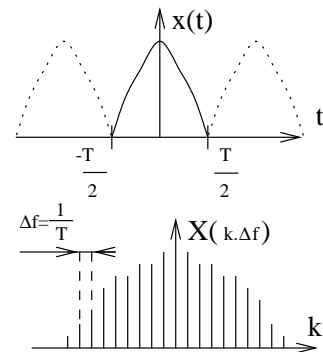
### II) Fonction continue périodique (Série de Fourier)

Temps : Fonction *périodique* et continue.

Fréquence : Fonction a périodique et *discrète*.

$$X[k] = X(k \Delta_f) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j2\pi k \Delta_f t} dt$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k \Delta_f) e^{+j2\pi k \Delta_f t}$$



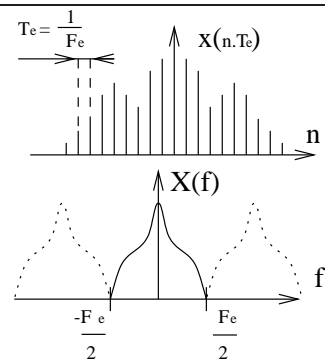
### III) Fonction échantillonnée

Temps : Fonction a périodique et *discrète*.

Fréquence : Fonction *périodique* et continue.

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n T_e) e^{-j2\pi f n T_e}$$

$$x[n] = x(n T_e) = \frac{1}{F_e} \int_{-\frac{F_e}{2}}^{\frac{F_e}{2}} X(f) e^{+j2\pi f n T_e} df$$



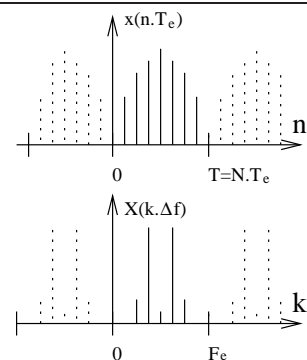
### IV) Fonction échantillonnée périodique (Transformée de Fourier discrète)

Temps : Fonction *périodique* et *discrète*.

Fréquence : Fonction *périodique* et *discrète*.

$$X[k] = X(k \Delta_f) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n T_e) e^{-j \frac{2\pi n k}{N}}$$

$$x[n] = x(n T_e) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k \Delta_f) e^{+j \frac{2\pi n k}{N}}$$



## Table des transformées de Laplace pour des signaux causaux

<b>h(t)</b>	<b>H(p)</b>	<b>Région de convergence</b>
$\delta(t)$	1	$p \in \mathbb{C}$
$\delta(t - \tau)$	$e^{-\tau p}$	$p \in \mathbb{C}$
$U(t)$	$\frac{1}{p}$	$\mathcal{R}e(p) > 0$
$t U(t)$	$\frac{1}{p^2}$	$\mathcal{R}e(p) > 0$
$\frac{1}{2!} t^2 U(t)$	$\frac{1}{p^3}$	$\mathcal{R}e(p) > 0$
$e^{-\alpha t} U(t)$	$\frac{1}{p+\alpha}$	$\mathcal{R}e(p) > -\alpha$
$t e^{-\alpha t} U(t)$	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$	$\mathcal{R}e(p) > -\alpha$
$\frac{t^n}{n!} e^{-\alpha t} U(t)$	$\frac{1}{(p+\alpha)^{n+1}}$	$\mathcal{R}e(p) > -\alpha$
$(1 - e^{-\alpha t}) U(t)$	$\frac{\alpha}{p(p+\alpha)}$	$\mathcal{R}e(p) > 0$
$\sin(\omega_0 t) U(t)$	$\frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$	$\mathcal{R}e(p) > 0$
$\cos(\omega_0 t) U(t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$	$\mathcal{R}e(p) > 0$
$e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t) U(t)$	$\frac{\omega_0}{(p+\alpha)^2 + \omega_0^2}$	$\mathcal{R}e(p) > \alpha$
$e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t) U(t)$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2 + \omega_0^2}$	$\mathcal{R}e(p) > \alpha$

## Table des transformées de Fourier

Fonctions  $\in L^1$

$as(t) + b g(t)$	$a S(f) + b G(f)$
$s(at + b)$	$\frac{1}{ a } S\left(\frac{f}{a}\right) e^{j2\pi \frac{b}{a} f}$
$s^*(t)$	$S^*(-f)$
$s(-t)$	$S(-f)$
$s(t - \tau)$	$S(f) e^{-j2\pi f \tau}$
$s(t) e^{j2\pi f_0 t}$	$S(f - f_0)$

## Table des transformées de Fourier usuelles

Fonctions  $\in L^2$

$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) g^*(t) dt =$ $\int_{-\infty}^{+\infty} S(f) G^*(f) df$
$\int_{-\infty}^{+\infty}  s(t) ^2 dt =$ $\int_{-\infty}^{+\infty}  S(f) ^2 df$

Si  $o(t)$  et  $e(t)$  sont respectivement une fonction impaire et une fonction paire, alors  $\forall x(t)$  :

$x(t)$	$=$	$o(t)$	$+$	$e(t)$	$=$	$\Re\{o(t)\}$	$+$	$j \Im\{o(t)\}$	$+$	$\Re\{e(t)\}$	$+$	$j \Im\{e(t)\}$
$\uparrow$		$\uparrow$		$\uparrow$		$\swarrow$		$\nearrow$		$\uparrow$		$\uparrow$
$TF$		$ $		$ $						$ $		$ $
$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$		$\swarrow$		$\searrow$		$\downarrow$		$\downarrow$
$X(f)$	$=$	$O(f)$	$+$	$E(f)$	$=$	$\Re\{O(f)\}$	$+$	$j \Im\{O(f)\}$	$+$	$\Re\{E(f)\}$	$+$	$j \Im\{E(f)\}$

## Transformée de Fourier de fonctions particulières

$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\pi f^2}$
$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$
$e^{\pm j 2\pi f_0 t}$	$\delta(f \mp f_0)$
$A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$	$\frac{A}{2} [e^{j\varphi_0} \delta(f - f_0) + e^{-j\varphi_0} \delta(f + f_0)]$
$A \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$	$\frac{A}{2j} [e^{j\varphi_0} \delta(f - f_0) - e^{-j\varphi_0} \delta(f + f_0)]$
$\Gamma(t) = \frac{1}{2} [1 + \text{sign}(t)]$	$\frac{1}{j2\pi} \text{Vp}\left(\frac{1}{f}\right) + \frac{1}{2} \delta(f)$
$(-j 2\pi t)^m$	$\delta^{(m)}(f)$
1	$\delta(f)$
$\delta(t)$	1
$\frac{1}{t}$	$-j\pi \text{sign}(f)$
$ t $	$-\frac{1}{2\pi^2 f^2}$
$\delta(t \pm \Delta T)$	$e^{\pm j 2\pi \Delta T f}$
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \Delta T)$	$\frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{\Delta T}\right)$
$\Pi_{\Delta T}(t) = \Gamma\left(t + \frac{\Delta T}{2}\right) - \Gamma\left(t - \frac{\Delta T}{2}\right)$	$\Delta T \frac{\sin(\pi \Delta T f)}{\pi \Delta T f}$
$\Delta F \frac{\sin(\pi \Delta F t)}{\pi \Delta F t}$	$\Pi_{\Delta F}(f) = \Gamma\left(f + \frac{\Delta F}{2}\right) - \Gamma\left(f - \frac{\Delta F}{2}\right)$
$\Lambda_{\Delta T}(t) = \frac{\Pi_{\Delta T}(t) * \Pi_{\Delta T}(t)}{\Delta T} = \begin{cases} 1 - \frac{ t }{\Delta T} & \text{pour }  t  \leq \Delta T \\ 0 & \text{pour }  t  > \Delta T \end{cases}$	$\Delta T \left( \frac{\sin(\pi \Delta T f)}{\pi \Delta T f} \right)^2$
$\Delta F \left( \frac{\sin(\pi \Delta F t)}{\pi \Delta F t} \right)^2$	$\Lambda_{\Delta F}(f) = \begin{cases} 1 - \frac{ f }{\Delta F} & \text{pour }  f  \leq \Delta F \\ 0 & \text{pour }  f  > \Delta F \end{cases}$

## Table des transformées en Z

Signal continu $x(t)$	Signal échantillonné $x(n T_e) = x[n]$	Transformée en Z $X(z)$	Région de convergence
$\delta(t)$	$\delta[n]$	1	$z \in \mathbb{C}$
$\delta(t - k T_e)$	$\delta[n - k]$	$z^{-k}$	$z \neq 0$
$U(t)$	$U[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z  > 1$
$\frac{t}{T_e} U(t)$	$n U[n]$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$ z  > 1$
$a^{\frac{t}{T_e}} U(t)$	$a^n U[n]$	$\frac{1}{1-a z^{-1}}$	$ z  >  a $
$\frac{t}{T_e} a^{\frac{t}{T_e}} U(t)$	$n a^n U[n]$	$\frac{a z^{-1}}{(1-a z^{-1})^2}$	$ z  >  a $
$\cos(\omega_0 t) U(t)$	$\cos(\omega_0 n T_e) U[n]$	$\frac{1-z^{-1} \cos(\omega_0 T_e)}{1-2z^{-1} \cos(\omega_0 T_e)+z^{-2}}$	$ z  > 1$
$\sin(\omega_0 t) U(t)$	$\sin(\omega_0 n T_e) U[n]$	$\frac{z^{-1} \sin(\omega_0 T_e)}{1-2z^{-1} \cos(\omega_0 T_e)+z^{-2}}$	$ z  > 1$
$a^{\frac{t}{T_e}} \cos(\omega_0 t) U(t)$	$a^n \cos(\omega_0 n T_e) U[n]$	$\frac{1-a z^{-1} \cos(\omega_0 T_e)}{1-2a z^{-1} \cos(\omega_0 T_e)+a^2 z^{-2}}$	$ z  >  a $
$a^{\frac{t}{T_e}} \sin(\omega_0 t) U(t)$	$a^n \sin(\omega_0 n T_e) U[n]$	$\frac{a z^{-1} \sin(\omega_0 T_e)}{1-2a z^{-1} \cos(\omega_0 T_e)+a^2 z^{-2}}$	$ z  >  a $
$-U(-t - T_e)$	$-U[-n - 1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z  < 1$
$-\frac{t}{T_e} U(-t - T_e)$	$-n U[-n - 1]$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$ z  < 1$
$-a^{\frac{t}{T_e}} U(-t - T_e)$	$-a^n U[-n - 1]$	$\frac{1}{1-a z^{-1}}$	$ z  <  a $
$-\frac{t}{T_e} a^{\frac{t}{T_e}} U(-t - T_e)$	$-n a^n U[-n - 1]$	$\frac{a z^{-1}}{(1-a z^{-1})^2}$	$ z  <  a $

### Remarque :

- 1) Il suffit de remplacer  $a$  par  $e^{-\alpha T_e}$  pour retrouver les expressions courantes de la transformée de Laplace. Par exemple :

$$a^{\frac{t}{T_e}} U(t) \text{ devient } e^{-\alpha t} U(t)$$

Fonctions qui ont, respectivement, pour transformées de Laplace :

$$\frac{1}{p - \frac{1}{T_e} \ln(a)} \text{ et } \frac{1}{p + \alpha}$$

- 2) La première colonne *Signal continu* ne présente aucun intérêt dans le cadre du calcul de la transformée en Z. Elle est présente ici pour le cas où nous aurions à calculer la transformée en Z de la réponse impulsionnelle (échantillonnée) d'un filtre connu au travers de sa fonction de transfert.