

# Imagerie par clôture de phase

J.-L. Prieur<sup>1,2</sup> A. Lannes<sup>3,4</sup>

Jean-Louis.Prieur@irap.omp.eu, Andre.Lannes@lss.supelec.fr

<sup>1</sup>Université de Toulouse – UPS-OMP – IRAP, Toulouse, France

<sup>2</sup>CNRS – IRAP, 14 avenue Edouard Belin, 31400 Toulouse, France

<sup>3</sup>CNRS/SUPELEC/Univ Paris-Sud, France

<sup>4</sup>SUPELEC, 2 rue E. Belin, 57070 Metz, France

OMP - Jul. 2012



# Plan

- 1 Synthèse d'ouverture
  - Aberrations de phase
  - Clôture de phase : idées directrices
  - Imagerie bispectrale
- 2 Calibration de phase
  - Définition initiale du problème
  - Structures algébriques
  - Redéfinition du problème avec les clôtures
  - Minimisation de la fonctionnelle  $g(\alpha)$
- 3 Imagerie par autocalibration

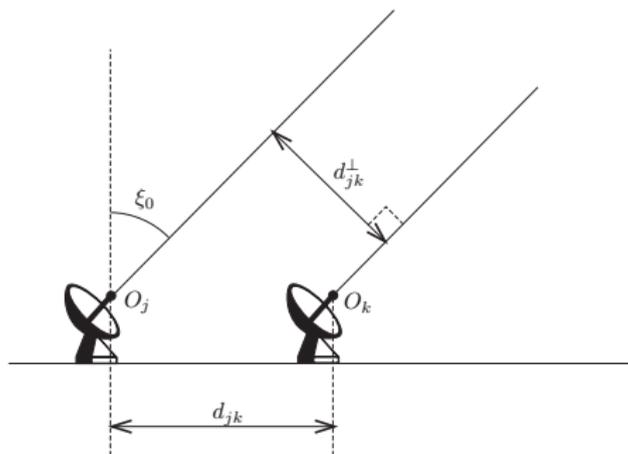
# Plan

- 1 Synthèse d'ouverture
  - Aberrations de phase
  - Clôture de phase : idées directrices
  - Imagerie bispectrale
- 2 Calibration de phase
  - Définition initiale du problème
  - Structures algébriques
  - Redéfinition du problème avec les clôtures
  - Minimisation de la fonctionnelle  $g(\alpha)$
- 3 Imagerie par autocalibration

# Plan

- 1 Synthèse d'ouverture
  - Aberrations de phase
  - Clôture de phase : idées directrices
  - Imagerie bispectrale
- 2 Calibration de phase
  - Définition initiale du problème
  - Structures algébriques
  - Redéfinition du problème avec les clôtures
  - Minimisation de la fonctionnelle  $g(\alpha)$
- 3 Imagerie par autocalibration

# Synthèse d'ouverture



Deux radiotélescopes pointant vers un objet astronomique  $o$ , dans la direction  $\xi_0$ , permettent de déterminer la composante de la transformée de Fourier  $\hat{s}_0(\mathbf{u})$  de sa fonction d'éclairement  $s_0(\xi)$  pour la fréquence angulaire  $\mathbf{u}_{j,k} = \mathbf{d}_{j,k}^\perp / \lambda$ .

# Théorème de Van Cittert-Zernike :

Soit  $V_{\text{ha}}(j, k)$  la visibilité complexe du champ électromagnétique  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  incident hors atmosphère, en l'absence d'aberrations :

$$V_{\text{ha}}(j, k) = \frac{\langle \Psi[\mathbf{r}(j), t] \Psi^*[\mathbf{r}(k), t] \rangle_t}{\langle |\Psi[\mathbf{r}(j), t]| \rangle_t \langle |\Psi[\mathbf{r}(k), t]| \rangle_t}$$

Soit  $s_o(\boldsymbol{\xi}) = \mathfrak{s}_o(\boldsymbol{\xi}) \times G(\boldsymbol{\xi})$ , où  $\mathfrak{s}_o(\boldsymbol{\xi})$  est la fonction d'éclairement de la source, et  $G(\boldsymbol{\xi})$  est le diagramme d'antenne (gain du lobe primaire).

*Théorème de Van Cittert-Zernike :*

$$V_{\text{ha}}(j, k) \propto \hat{s}_o(\mathbf{u}_{j,k}) \quad \text{où} \quad \hat{s}_o(\mathbf{u}_{j,k}) = \int G(\boldsymbol{\xi}) \mathfrak{s}_o(\boldsymbol{\xi}) e^{-2i\pi \mathbf{u}_{j,k} \cdot \boldsymbol{\xi}} d\boldsymbol{\xi}$$

$\mathbf{u}_{j,k} = [\mathbf{d}_k^\perp - \mathbf{d}_j^\perp] / \lambda$  : vecteur de fréquence angulaire.

$\lambda$  : longueur d'onde du champ électromagnétique observé.

## Ordres de grandeur

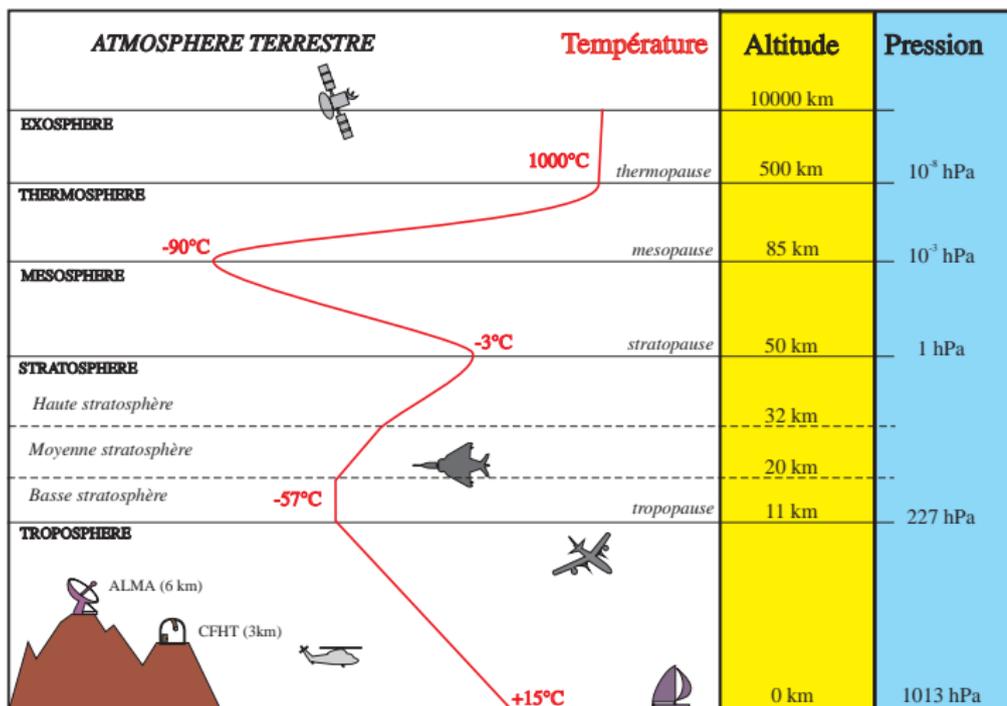
Fréquence :  $\nu = c/\lambda$  avec  $c = 3 \times 10^8$  m.s<sup>-1</sup>.

$\lambda$	1 m	21 cm	1 cm	3 mm	1 mm
$\nu$	0.3 GHz	1.4 GHz	30 GHz	100 GHz	300 GHz

Résolution maximale :  $\theta = 1/u_{\max} = \lambda/d_{\max}$

Instrument	$\lambda$	$d_{\max}$	$\theta$
VLA (27x25m)	21 cm	36 km	1".2
IRAM (6x15m)	3 mm	760 m	0".8
PISCO (Merate)	0.5 $\mu$ m	1 m	0".1
VLTI (4x8.2m)	1 $\mu$ m	130 m	0".002

# Structure de l'atmosphère terrestre



## Variations de l'indice de l'air

Sur le trajet atmosphérique : variations de température et du taux d'humidité  $\Rightarrow$  variations de l'indice  $n$  de l'air.

Dans le **domaine visible** (cf. Goodman, 1985, p 388, et Cox, A., 2000, *Allen's Astrophysical Quantities*, AIP Press) :

$$n \approx 1 + 77.6 \times 10^{-6} (1 + 7.52 \times 10^{-3} \lambda^{-2}) \frac{P}{T}$$

$\lambda$  en microns,  $P$  pression en millibars,  $T$  température en degrés K.

Dans le **domaine millimétrique**, à 100 GHz ( $\lambda = 3$  mm) (cf. ALMA memo No 517, Stirling A., Richer J. Hills R., Lock A., May 2008) :

$$n \approx 1 + 10^{-6} \left[ \alpha \frac{P_d}{T} + \beta \frac{P_w}{T} + \gamma \frac{P_w}{T^2} \right]$$

où  $P_d$  et  $P_w$  sont les pressions partielles d'air sec et de vapeur d'eau.

$\alpha = 77.6 \times 10^{-2} \text{ K.Pa}^{-1}$ ,  $\beta = 64.8 \times 10^{-2} \text{ K.Pa}^{-1}$ ,  $\gamma = 3.78 \times 10^3 \text{ K}^2.\text{Pa}^{-1}$ .

## Origine des aberrations de phase

Retard de phase pour la traversée d'une couche d'air d'épaisseur  $z$  :

$$\Phi = (2\pi/\lambda) n z$$

Dans le domaine visible, on a :

$$\frac{\partial n}{\partial T} \approx -77.6 \times 10^{-6} \times \frac{P}{T^2}$$

Exemple : pour deux faisceaux lumineux ayant traversé deux colonnes d'air de  $z = 1$  km de longueur, avec  $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$ ,  $T = 273$  K et  $P = 700$  mbar, on obtient un déphasage relatif de  $\Delta\Phi = 2\pi$  radians si  $\Delta n = \lambda/z$ , i.e.,  $\Delta T = \lambda T^2 / (77.6 \times 10^{-6} z P)$ , soit une différence de température de  $7 \times 10^{-6}$  K entre ces deux colonnes d'air !

*Rappel : 1 bar =  $10^5$  Pa et 273K = 0°C*

# Clôture de phase : idées directrices

On a :  $\hat{s}_o(\mathbf{u}(i,j)) = \rho_o(i,j) \exp i\beta_o(i,j)$

$$V_{\text{ha}}(i,j) = \rho_{\text{vha}}(i,j) \exp i\beta_{\text{vha}}(i,j)$$

1. D'après le **théorème de Van Cittert-Zernicke** :

$$V_{\text{ha}}(i,j) \propto \rho_o(i,j) \exp i\beta_o(i,j)$$

$$\exp i\beta_{\text{vha}}(i,j) \approx \exp i\beta_o(i,j)$$

2. La propagation des ondes dans l'atmosphère induit des aberrations de phase  $\alpha_d(k)$  qui perturbent la mesure de  $V(i,j)$ . La visibilité expérimentale  $V_d(i,j)$  mesurée au niveau du sol est de la forme :

$$V_d(i,j) = V_{\text{ha}}(i,j) \exp i[\alpha_d(i) - \alpha_d(j)]$$

D'où :

$$\exp i\beta_d(i,j) \approx \exp i[\beta_o(i,j) + \alpha_d(i) - \alpha_d(j)]$$

# Clôture de phase : idées directrices (suite)

**3. Relations de clôture de phase :** combinaison des données qui annulent la contribution des aberrations de phase (*en optique : relations bispectrales*) :

$$V_d(i, j) \times V_d(j, k) \times V_d^*(i, k) \approx V_{ha}(i, j) \times V_{ha}(j, k) \times V_{ha}^*(i, k) \\ \times \exp i \{ [\alpha_d(i) - \alpha_d(j)] + [\alpha_d(j) - \alpha_d(k)] - [\alpha_d(i) - \alpha_d(k)] \}$$

D'où :

$$\beta_d(i, j) + \beta_d(j, k) - \beta_d(i, k) \approx \beta_o(i, j) + \beta_o(j, k) - \beta_o(i, k)$$

**4. En optique : inversion bispectrale.** Le phaseur  $\exp i\gamma_d$  du bispectre expérimental est égal au phaseur du bispectre de l'objet. On obtient une estimation  $\tilde{\beta}_o(\mathbf{u})$  de la fonction de la phase de  $\hat{s}_o$  (sur toute la couverture fréq.) en inversant la phase du bispectre expérimental :

$$\tilde{\beta}_o \stackrel{\text{def}}{=} \underset{\beta}{\operatorname{argmin}} \|w_e (\exp i\gamma_d - \exp iC_B\beta)\|$$

Si pupille pleine, bonne couverture fréquentielle : indétermination en position seulement ( $\dim \ker C_B = 2$ ).

**5. En radio : faible couverture fréquentielle**,  $\dim \ker C \gg 2$ . Les fonctions de phase d'une estimation  $\hat{g}$  de  $\hat{s}$  et de  $V_d(i, j)$  doivent vérifier les mêmes relations de clôture :

$$\beta_g(i, j) + \beta_g(j, k) - \beta_g(i, k) \stackrel{(2\pi)}{=} \beta_d(i, j) + \beta_d(j, k) - \beta_d(i, k) + \epsilon(i, j, k)$$

**L'autocalibration** consiste à corriger la fonction de phase  $\beta_g(i, j)$  de l'estimation courante  $\hat{g}$  de  $\hat{s}_0$  pour que, à la fois :

- (i) les  $\epsilon(i, j, k)$  soient les plus petits possible,
- (ii) et que la fonction  $g$  vérifie les contraintes définies sur l'objet.

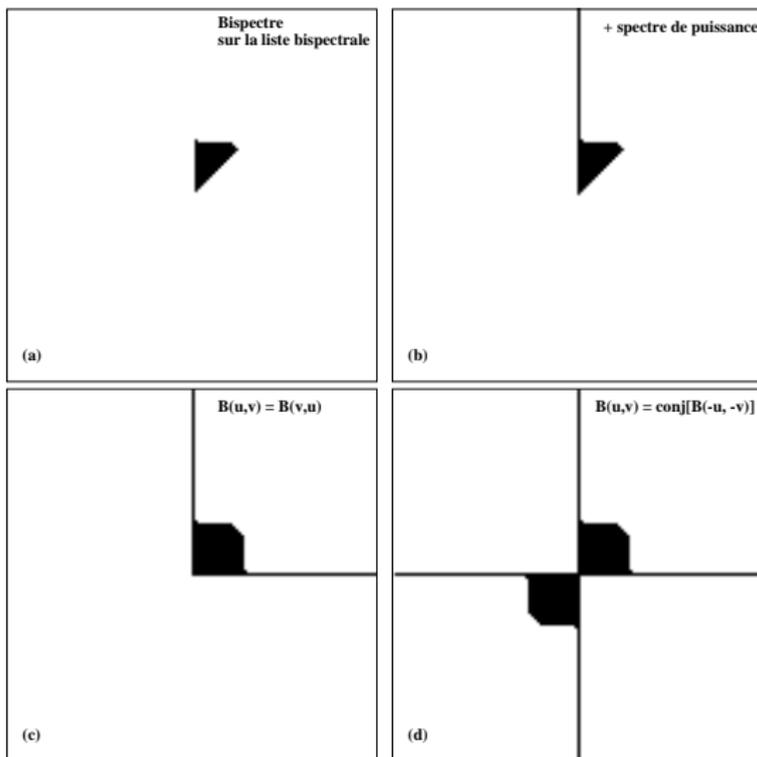
## Bispectre : définition

Le *bispectre*  $\mathcal{B}_f$  d'une fonction  $f$  de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{C}$  est une fonction de  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{C}$ , définie par :

$$\mathcal{B}_f(\vec{u}, \vec{v}) = \hat{f}(\vec{u}) \times \hat{f}(\vec{v}) \times \hat{f}^*(\vec{u} + \vec{v})$$

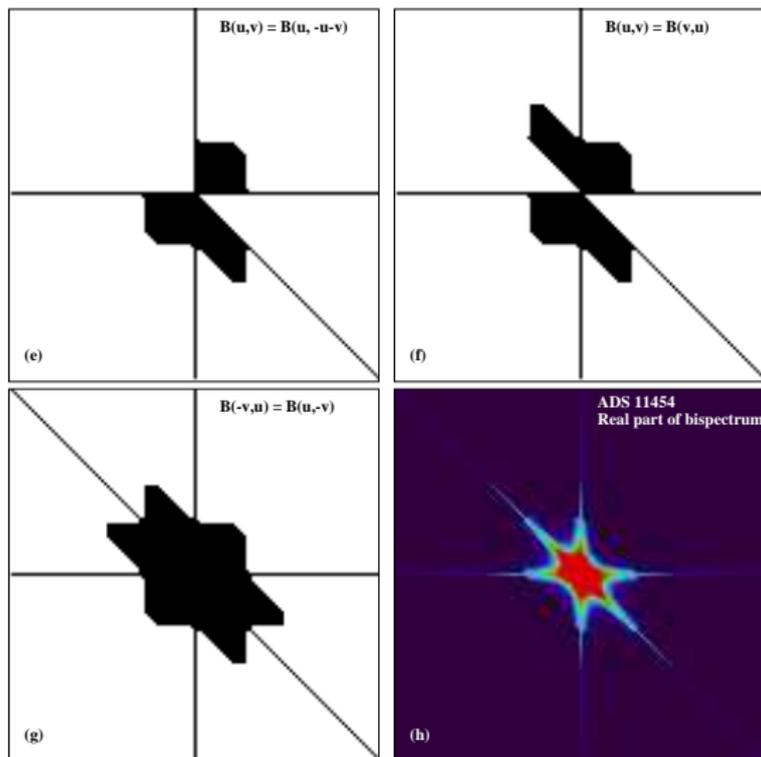
NB : Dans le cas de l'imagerie bispectrale avec PISCO,  $p = 2$ , et  $\mathcal{B}_f$  est donc défini de  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{C}$ , ce qui pose des problèmes de stockage et de visualisation. Je travaille sur une *liste bispectrale*, telle que l'a proposée A. Lannes en 1991.

# Visualisation du bispectre de ADS 11454 (1/2)



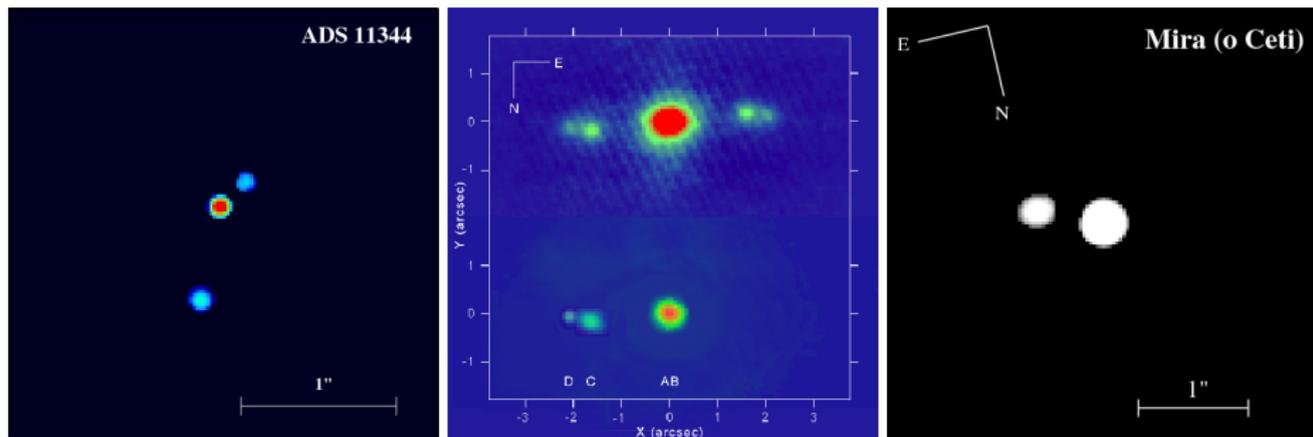
Construction d'une coupe de la partie réelle du bispectre  $\mathcal{B}((u1, 0), (v1, 0))$  à partir des mesures du spectre de puissance et du bispectre sur la liste bispectrale (ici  $r_{\max} = 30$ ).

# Visualisation du bispectre de ADS 11454 (2/2)



Construction d'une coupe de la partie réelle du bispectre  $B((u1, 0), (v1, 0))$  à partir des mesures du spectre de puissance et du bispectre sur la liste bispectrale (ici  $r_{\max} = 30$ ).

## Restauration d'images par inversion bispectrale



ADS 11344, ADS 11454 et Mira (o Ceti).

## Visibilités des données expérimentales

$$V_d(i, j) = V_o(i, j) e^{i[\alpha_d(i) - \alpha_d(j)]} + \epsilon_d(i, j)$$

$V_d(i, j)$  visibilité expérimentale, i.e., visibilité complexe du champ électromagnétique mesurée pour la ligne de base  $(i, j)$ .

$\alpha_d(i)$  phase de biais induite par la turbulence atmosphérique pour la pupille d'indice  $i$ . En fait : variable aléatoire  $\alpha_d(i, t)$ .

$\epsilon_d(i, j)$  terme de bruit associé à la ligne de base  $(i, j)$ .

$$\text{Opérateur } B \text{ de phase de biais : } (B\alpha_d)(i, j) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_d(i) - \alpha_d(j)$$

On a donc :  $V_d(i, j) = V_o(i, j) e^{iB\alpha_d}$  et  $\beta_d \approx \beta_o + B\alpha_d$

Indétermination pour les phases de biais :

on posera  $\alpha_d(i) = \alpha_d(i) - \alpha_d(1)$ , d'où  $\alpha_d(1) = 0$ .

La **calibration de phase** a pour but de déterminer les aberrations de phase  $\alpha_d$ . Pour cela il faut donc minimiser :

$$f_o(\alpha_d) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{(i,j) \in \mathcal{B}} w_o(i,j) \times |V_d(i,j) e^{-i[\alpha_d(i) - \alpha_d(j)]} - V_m(i,j)|^2$$

où  $V_d = \rho_d e^{i\varphi_d}$  (d : données) et  $V_m = \rho_m e^{i\varphi_m}$  (m : modèle) :

$$f_o(\alpha_d) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{B}} w_o(i,j) \times |\rho_d(i,j) e^{i\{[\varphi_d(i,j) - \varphi_m(i,j)] - [\alpha_d(i) - \alpha_d(j)]\}} - \rho_m(i,j)|^2$$

Posons :

$$\varphi(i,j) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_d(i,j) - \varphi_m(i,j) \quad (\text{modulo } 2\pi)$$

Avec  $\|\beta\|_{w_o}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{(i,j) \in \mathcal{B}} w_o(i,j) |\beta(i,j)|^2$  et  $(B\alpha_d)(i,j) = \alpha_d(i) - \alpha_d(j)$

on a :  $f_o(\alpha_d) = \|\rho_d e^{i(\varphi - B\alpha_d)} - \rho_m\|_{w_o}^2$

Si  $\rho_d \approx \rho_m$  :

$$f_o(\alpha_d) \stackrel{\text{def}}{=} \|e^{i(\varphi - B\alpha_d)} - 1\|_w^2$$

La calibration de phase peut donc être effectuée en minimisant la fonctionnelle suivante :

$$f_{\circ}(\alpha_d) = \|e^{i(\varphi - B\alpha_d)} - 1\|_w^2$$

Introduisons la fonction “corde” :

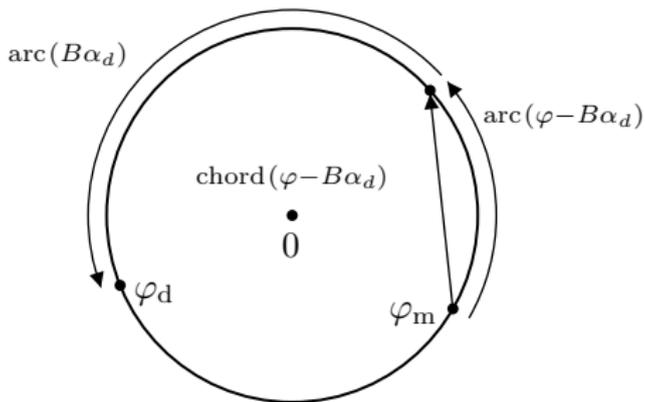
$$\text{chord } \theta \stackrel{\text{def}}{=} |e^{i\theta} - 1|$$

Il vient :

$$f_{\circ}(\alpha_d) = \|\text{chord}(\varphi - B\alpha_d)\|_w^2$$

Depuis Cornwell and Wilkinson (1981), c'est la “fonctionnelle standard” du problème de calibration de phase.

Inconvénient : non linéaire, problèmes de stabilité de la minimisation.



Forme standard :  $f_o(\alpha_d) = \|\text{chord}(\varphi - B\alpha_d)\|_w^2$

Remarque :  $\text{chord } \theta = 2 |\sin(\theta/2)|$

*Fonctionnelle proposée par A. Lannes<sup>(1)</sup> (2005) :*

$$g_o(\alpha_d) \stackrel{\text{def}}{=} \|\text{arc}(\varphi - B\alpha_d)\|_w^2$$

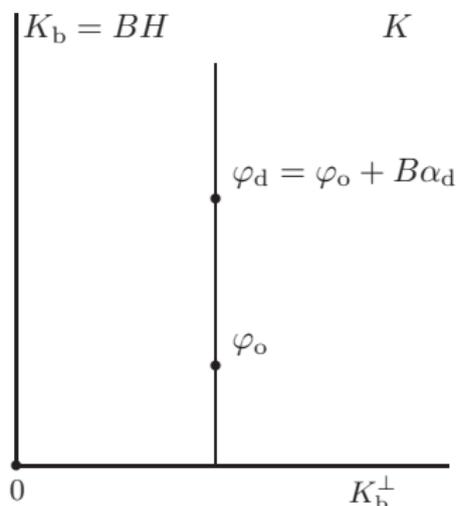
avec la fonction “arc” définie par :  $\text{arc } \theta \stackrel{\text{def}}{=} \theta - 2\pi \left\lfloor \frac{\theta}{2\pi} \right\rfloor$

où  $\lfloor x \rfloor$  est l’entier de  $\mathbb{Z}$  le plus proche de  $x$ .

On a donc :  $-\pi < \text{arc } \theta \leq \pi$ .

<sup>(1)</sup> Lannes A., 2005, “A global analysis of the phase calibration operation” JOSA A, 22, 697

## Visibilités expérimentales



$H$  : espace des fonctions des phases pupillaires.

$K$  : espace des fonctions des phases des lignes de base.

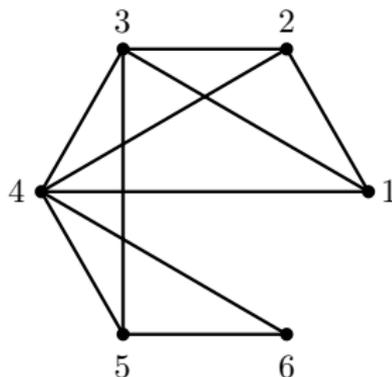
$K_b$  : espace des fonctions des phases de biais.

## Graphe de calibration de phase $\mathcal{G} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{A}, \mathcal{B})$

$\mathcal{B}$  : ensemble des arêtes, ou lignes de base telles que le module de la visibilité complexe  $V_d(i, j)$  est supérieur à un certain seuil.

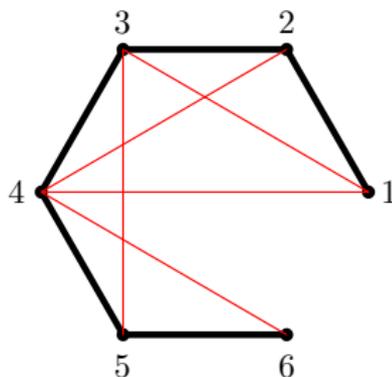
$\mathcal{A}$  : ensemble des sommets, ou télescopes, correspondant à  $\mathcal{B}$ .

Exemple :



$\mathcal{A}$  a six sommets (“vertices”) :  $n_v = 6$   
 et  $\mathcal{B}$  a dix arêtes (“edges”) :  $n_e = 10$ .

## Arbre maximal $\mathcal{G}_{st}$ et lignes d'entrée de boucles ( $\mathcal{G}_c$ )



**Arbre maximal (“spanning tree”)** :  $n_{st} \stackrel{\text{def}}{=} n_v - 1$ .

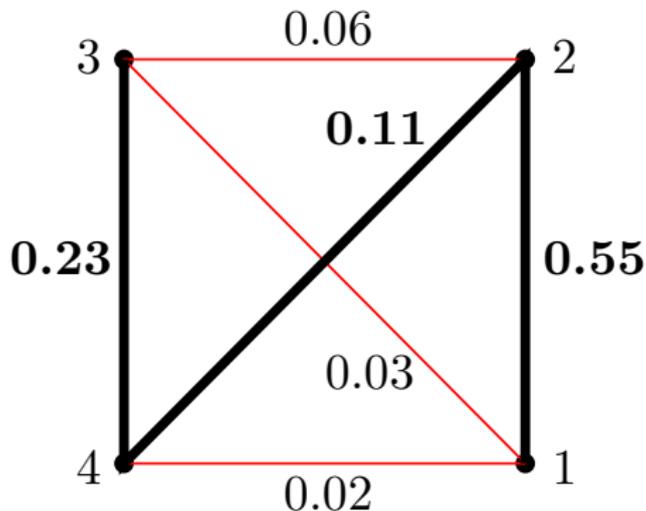
**Lignes d'entrée de boucle** :  $n_c = n_e - n_{st}$ .

Puisque  $n_v = 6$  et  $n_e = 10$ , on a  $n_{st} = 5$  et  $n_c = 5$ .

Cycles ou boucles (de clôture) associés :

$(1, 3, 2)$ ,  $(1, 4, 3, 2)$ ,  $(2, 4, 3)$ ,  $(3, 5, 4)$  et  $(4, 6, 5)$ .

## Exemple d'arbre maximal pondéré

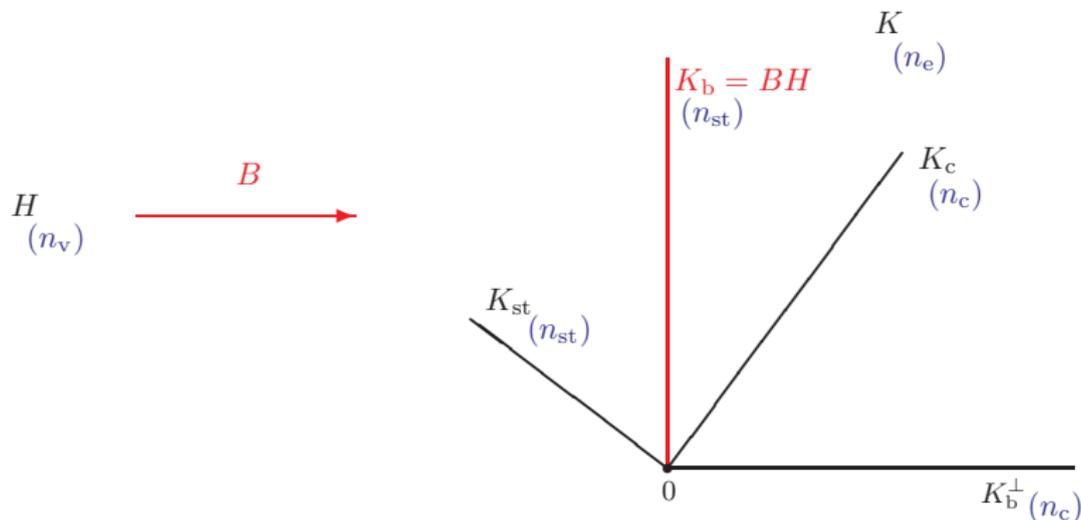


*Algorithme de Kruskal :*

**Arbre maximal** de poids maximal (“Spanning tree of maximal weight”) : (1,2), (3,4) et (2,4)

**Arêtes d'entrée de cycle** : (“Loop-entry baselines”) : (2,3) (1,3) (1,4)

# Espaces fonctionnels



$H$  : fonctions de phases pupillaires (fonctions de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathbb{R}$ )

$K$  : fonctions de phases des lignes de base (fonctions de  $\mathcal{B}$  dans  $\mathbb{R}$ )

$K_{st}$  : fonctions de phases de  $\mathcal{B}_{st}$  (i.e., fonctions nulles sur  $\mathcal{B}_c$ )

$K_c$  : fonctions de phases de  $\mathcal{B}_c$  (i.e., fonctions nulles sur  $\mathcal{B}_{st}$ )

$K_b$  : fonctions de phases de biais (image de  $H$  par  $B$ )

$K_b^\perp$  : espace orthogonal à  $K_b$  avec le p. scalaire euclidien :  $(\beta_1, \beta_2) = \bar{\beta}_1^t \cdot \beta_2$

# Projection oblique $\beta = \beta_b + \beta_c$

## 1. Décomposition orthogonale $K_{st} + K_c$

Puisque  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{st} \cup \mathcal{B}_c$  avec  $\mathcal{B}_{st} \cap \mathcal{B}_c = \{0\}$ , on en déduit que :  
 $K = K_{st} + K_c$  avec  $K_{st} \cap K_c = \{0\}$ .

$$\beta = Q_{st}\beta + Q_c\beta$$

avec  $(Q_{st}\beta)(i,j) = \beta(i,j)$  sur  $\mathcal{B}_{st}$  et  $(Q_{st}\beta)(i,j) = 0$  sur  $\mathcal{B}_c$ ,  
et avec  $Q_c\beta = 0$  sur  $\mathcal{B}_{st}$  et  $Q_c\beta = \beta$  sur  $\mathcal{B}_c$ .

## 2. Isomorphisme entre $K_{st}$ et $H \Rightarrow B_{st}$ est inversible

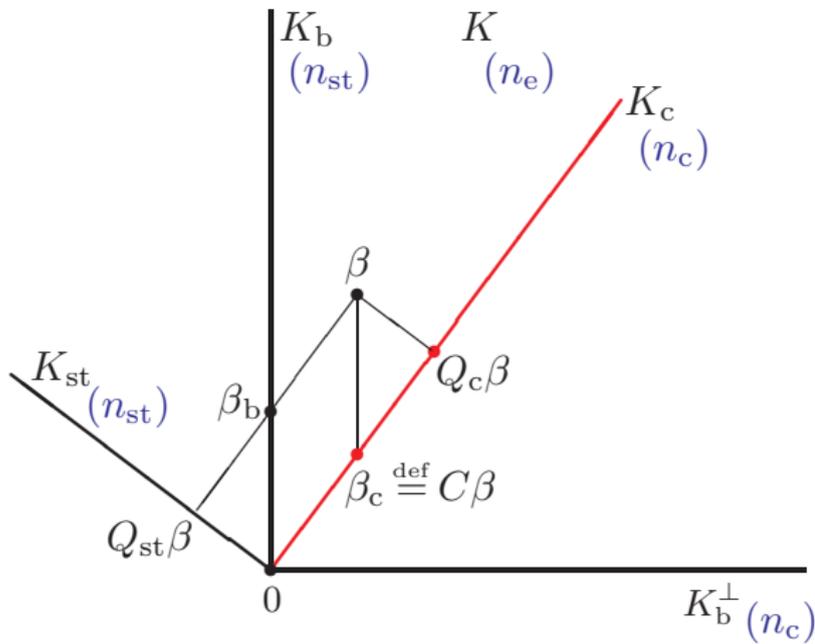
$$\alpha_\beta = B_{st}^{-1}Q_{st}\beta$$

## 3. Décomposition oblique $K_b + K_c$

$$\beta = \beta_b + \beta_c \quad \text{avec} \quad \beta_b = B\alpha_\beta$$

Vecteur des phases de clôture :  $\beta_c \stackrel{\text{def}}{=} \beta - \beta_b$

# Projection oblique $\beta = \beta_b + \beta_c$



## Projection oblique $\beta = \beta_b + \beta_c$

**Propriété 1.** *Toute fonction de phase de lignes de base  $\beta$  de  $K$  peut être décomposée de la forme  $\beta = \beta_b + \beta_c$  avec  $\beta_b \stackrel{\text{def}}{=} B\alpha_\beta$ , et  $\beta_c \in K_c$ . Pour un arbre maximal donné, cette décomposition est unique. Comme corollaire :  $K$  est la somme directe de  $K_b$  et  $K_c$  :*

$$K = K_b + K_c \quad \text{avec} \quad K_b \cap K_c = \{0\}$$

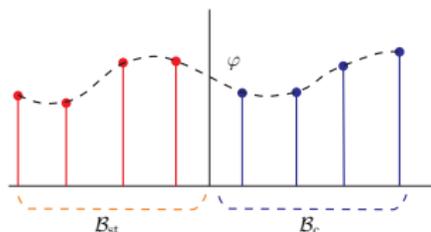
Cette propriété est aussi valable pour toute fonction  $\nu$  de  $K(\mathbb{Z})$  qui peut être décomposée de la forme  $\nu = \nu_b + \nu_c$  avec  $\nu_b \stackrel{\text{def}}{=} B\mu_\nu$  et  $\nu_c$  dans  $K_c(\mathbb{Z})$ . Ces fonctions  $\mu_\nu$ ,  $\nu_b$  et  $\nu_c$  sont à valeurs entières. Le réseau entier (“integer lattice”)  $K(\mathbb{Z})$  est donc la somme directe des réseaux entiers  $K_b(\mathbb{Z})$  et  $K_c(\mathbb{Z})$  :

$$K(\mathbb{Z}) = K_b(\mathbb{Z}) + K_c(\mathbb{Z}) \quad \text{avec} \quad K_b(\mathbb{Z}) \cap K_c(\mathbb{Z}) = \{0\}$$

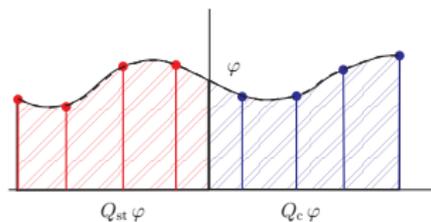
# Illustration de la décomposition oblique $\varphi = \varphi_b + \varphi_c$

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_{st} \cup \mathcal{B}_c$$

avec  $\mathcal{B}_{st} \cap \mathcal{B}_c = \emptyset$



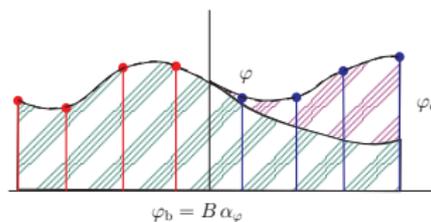
$$\varphi = Q_{st}\varphi + Q_c\varphi$$



$$\alpha_\varphi = B_{st}^{-1}Q_{st}\varphi$$

$$\varphi = \varphi_b + \varphi_c$$

avec  $\varphi_b = B\alpha_\varphi$



# Prise en compte du bruit des mesures

La distance utilisée dans la définition des fonctionnelles à minimiser doit tenir compte du bruit des mesures. Par exemple :

$$g_{\circ}(\alpha_d) \stackrel{\text{def}}{=} \|\text{arc}(\varphi - B\alpha_d)\|_w^2$$

Le cas le plus général correspond à la distance de P.C. Mahalanobis<sup>(1)</sup> (1936) dont le produit scalaire associé est :

$$(\beta_1, \beta_2)_w = \bar{\beta}_1^t [\mathcal{V}]^{-1} \beta_2$$

où  $[\mathcal{V}]$  est la matrice de variance-covariance des mesures du vecteur de phase  $\varphi_d$  des lignes de base.

Pour simplifier, comme Lannes & Prieur (2011), nous supposons que  $[\mathcal{V}]$  est une matrice diagonale dont les entrées sont  $1/w(i, j)$  :

$$(\beta_1 | \beta_2)_w \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{(i,j) \in \mathcal{B}} w(i, j) \beta_1(i, j) \beta_2(i, j)$$

<sup>(1)</sup> Mahalanobis, Prasanta Chandra (1936) "On the generalised distance in statistics"

## Orthogonal de $K_b$ dans $K_w$

Pour tout  $\beta$  de  $[\mathcal{V}] K_b^\perp$ ,  $[\mathcal{V}]^{-1}\beta$  appartient à  $K_b^\perp$ .

On en déduit que pour tout  $\beta_b$  de  $K_b$ , et tout  $\beta$  de  $[\mathcal{V}] K_b^\perp$  :

$$(\beta_b \mid \beta)_w = (\beta_b \mid [\mathcal{V}]^{-1}\beta) = 0.$$

Ceci montre que  $[\mathcal{V}] K_b^\perp$  est le complément orthogonal de  $K_b$  dans l'espace “pondéré”  $K_w$  :

$$K_b^{\perp w} = [\mathcal{V}] K_b^\perp$$

## Projection orthogonale de $K_w$ sur $K_b$

Considérons  $B$  comme un opérateur de  $H$  dans  $K_w$ .

Soit  $B^+$  l'inverse généralisé de Moore-Penrose de  $B$  (qui existe puisque  $\ker B = \{0\}$ ) :

$$B^+ \beta = \operatorname{argmin}_{\alpha \in H} \|\beta - B\alpha\|_w^2$$

(ce qui revient à dire que  $BB^+ \beta$  est la projection orthogonale de  $\beta$  sur  $K_b$ )

La fonction de phase pupillaire associée est donc solution de l'équation normale :

$$B^* B \alpha = B^* \beta$$

où  $B^*$  est l'adjoint de  $B$  relativement au produit scalaire pondéré :

$$\begin{aligned} [B^*] \beta &= [B]^t [\mathcal{V}]^{-1} \beta \\ &= [B]^t [w \beta] \end{aligned}$$

## Projection orthogonale de $K_w$ sur $K_b^{\perp w}$

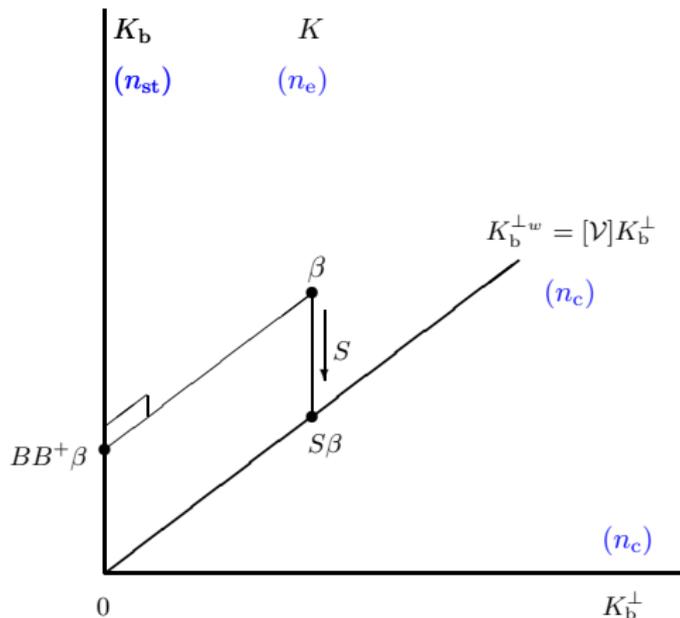
$BB^+$  étant la projection orthogonale de  $K_w$  sur  $K_b$ , l'opérateur  $S$  de projection orthogonale de  $K_w$  sur  $K_b^{\perp w}$  est défini par :

$$S\beta \stackrel{\text{def}}{=} \beta - BB^+\beta$$

On note  $S_c$  sa restriction à  $K_c$  :

$$S_c: K_c \rightarrow K_b^{\perp w} \quad \text{et} \quad S_c\beta_c = S\beta_c$$

# Projections orthogonales dans l'espace pondéré $K_w$



## Redéfinition du problème avec les clôtures

Fonctionnelle à minimiser :  $g_o(\alpha_d) \stackrel{\text{def}}{=} \|\text{arc}(\varphi - B\alpha_d)\|_w^2$

Décomposition oblique de  $\varphi$  :

$$\varphi = B\alpha_\varphi + \varphi_c \quad \text{avec} \quad \alpha_\varphi \stackrel{\text{def}}{=} B_{\text{st}}^{-1} Q_{\text{st}} \varphi$$

En posant  $\widehat{\varphi}_c \stackrel{\text{def}}{=} \text{arc}(\varphi_c)$  et  $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_d - \alpha_\varphi$

$$g(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \|\text{arc}(\widehat{\varphi}_c - B\alpha)\|_w^2$$

Relation entre les minimiseurs de  $g_o$  et  $g$  :  $\alpha_{g_o} = \alpha_g + \alpha_\varphi$

Si on pose :

$$\varepsilon_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \text{arc}(\widehat{\varphi}_c - B\alpha)$$

Il vient :  $g(\alpha) = \|\varepsilon_\alpha\|_w^2$  et

$$\varepsilon_{\alpha_g} = \text{arc}[(\varphi - B\alpha_\varphi) - B\alpha_g] = \text{arc}(\varphi - B\alpha_{g_o})$$

## Expressions de la fonction de visibilité calibrée

On a montré que :

$$V_d(i,j) = V_o(i,j) e^{iB\alpha_d(i)}$$

Puisque  $\alpha_{g_o}$  est une estimation de  $\alpha_d$  :  $B\alpha_{g_o} \approx B\alpha_d$ , d'où :

$$V_d(i,j) e^{-iB\alpha_{g_o}} \approx V_o(i,j)$$

On définit ainsi la visibilité calibrée par :

$$V_{d\star} = \rho_d e^{i(\varphi_d - B\alpha_{g_o})}$$

Puisque  $\varphi = \varphi_d - \varphi_m$  et  $\varepsilon_{\alpha_g} = \text{arc}(\varphi - B\alpha_{g_o})$ , on a aussi :

$$V_{d\star} = \rho_d e^{i(\varphi_m + \varepsilon_{\alpha_g})}$$

# Recherche des minimiseurs de $g(\alpha)$ : minimiseurs $\tau$ -contraints

Soit  $\tau$  une fonction à valeurs réelles définie sur l'ensemble des arêtes de  $\mathcal{B}$  telle que :

$$\forall (i,j) \in \mathcal{B}, \quad 0 < \tau(i,j) < 1/2$$

Notre objectif est d'identifier les **minimiseurs  $\tau$ -contraints**  $\alpha_g$  de  $g(\alpha)$  pour lesquels :

$$|\varepsilon_{\alpha_g}| \leq 2\pi\tau \quad (\text{sur tout } \mathcal{B})$$

Rappel :  $\text{arc } \theta \stackrel{\text{def}}{=} \theta - 2\pi \left\lfloor \frac{\theta}{2\pi} \right\rfloor$  où  $\lfloor x \rfloor$  est l'entier de  $\mathbb{Z}$  le plus proche de  $x$ . On a donc :  $-\pi < \text{arc } \theta \leq \pi$ .

En prenant  $\tau$  très proche de  $1/2$ , on étend la recherche à tous les minima de  $g(\alpha)$ .

# Recherche des minimiseurs de $g(\alpha)$ : définitions de $\hat{v}$ , $\dot{v}$ et $\Gamma_\tau$

Soit  $v$  un vecteur quelconque de  $K_c$  :

$$v = \sum_{\ell=1}^{n_c} v^{(\ell)} \mathbf{e}_\ell \quad v^{(\ell)} \stackrel{\text{def}}{=} v(i_\ell, j_\ell)$$

où  $\mathbf{e}_\ell$  est la fonction caractéristique de la boucle d'entrée de cycle  $(i_\ell, j_\ell)$ .

Pour faire le lien avec des problèmes similaires rencontrés en GNSS (Lannes et Teunissen, 2011), on note  $\hat{v}$  le vecteur de  $\mathbb{R}^{n_c}$  dont les composantes sont :

$$\hat{v}^{(\ell)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \hat{\varphi}_c(i_\ell, j_\ell) \quad (\text{for } \ell = 1, \dots, n_c)$$

Pour chaque point  $\dot{v}$  du réseau entier  $\mathbb{Z}^{n_c}$ , introduisons la fonction de phase pupillaire :

$$\dot{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} 2\pi B^+(\hat{v} - \dot{v})$$

Définissons le domaine suivant  $\Gamma_\tau$ , inclus dans  $\mathbb{Z}^{n_c}$  et centré sur  $\dot{v}$  :

$$\Gamma_\tau \stackrel{\text{def}}{=} \{\dot{v} \in \mathbb{Z}^{n_c} : |S_c(\dot{v} - \hat{v})| \leq \tau\}$$

# Recherche des minimiseurs de $g(\alpha)$ : définition de l'ellipsoïde de recherche $\mathfrak{E}$

A. Pour tout  $\beta$  de  $K_c$  :

$$\|S_c\beta\|_w^2 = (S_c\beta \mid [\mathcal{V}]^{-1}S_c\beta) = \|T_c\beta\|^2$$

où  $[T_c] \stackrel{\text{def}}{=} [\mathcal{V}]^{-1/2}[S_c]$

On montre que  $[T_c]'[T_c] = [\mathcal{V}_c]^{-1} = [S_c]'[\mathcal{V}]^{-1}[S_c]$

Ceci permet de passer d'une distance pondérée à une distance euclidienne, ce qui facilite la recherche discrète, du point le plus proche du réseau entier (NLP : "Nearest Lattice Point").

B. Considérons l'ellipsoïde  $\mathfrak{E}(c)$ , centré sur  $\hat{v}$ , de paramètre de taille  $c$ ,

$$\mathfrak{E}(c) \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in \mathbb{R}^{n_c} : \|T_c(v - \hat{v})\|^2 \leq c\}$$

Remarque :  $\Gamma_{1/2} \subset \mathfrak{E}(1/4)$ , puisque  $\|S_c(v - \hat{v})\|_w^2 = \|T_c(v - \hat{v})\|^2$ .

## Recherche des minimiseurs de $g(\alpha)$ : propriété caractéristique

Lannes & Prieur (2011) ont démontré que :

**Propriété 2.** *Les minimiseurs  $\tau$ -contraints de  $g$  sont associés avec les points  $\hat{\nu}$  de  $\Gamma_\tau$ . Plus précisément, les minimiseurs  $\tau$ -contraints  $\alpha_g$  associés avec un point  $\hat{\nu}$  de  $\Gamma_\tau$  sont égaux à  $\hat{\alpha}$  modulo  $2\pi$  (sur chaque élément pupillaire de  $\mathcal{A}$ ).*

*Corollaire :  $e^{i\alpha_g} = e^{i\hat{\alpha}}$ ,  $g(\alpha_g) = g(\hat{\alpha})$  et  $\varepsilon_{\alpha_g} = \varepsilon_{\hat{\alpha}} = 2\pi S_c(\hat{\nu} - \hat{\nu})$  avec  $|\varepsilon_{\hat{\alpha}}| \leq 2\pi\tau$ .*

# Recherche des minimiseurs de $g(\alpha)$ : mode opératoire (1/2)

1. Exploration de  $\mathfrak{E}(1/4)$  à la recherche des  $\dot{v}$  (problème NLP : algorithme de **recherche discrète**).

2. **Test d'appartenance à  $\Gamma_{1/2}$** . Calcul de :

$$S_c(\dot{v} - \hat{v}) = \sum_{\ell=1}^{n_c} (\dot{v}^{(\ell)} - \hat{v}^{(\ell)}) \eta_\ell$$

Lorsque  $|S(\dot{v} - \hat{v})| < 1/2$  sur tout  $\mathcal{B}$ ,  $\dot{v}$  est dans  $\Gamma_{1/2}$ .

3. D'après la propriété 2,  **$\dot{\alpha}$  est alors un minimiseur de  $g$** . Il peut être calculé avec la formule :

$$\dot{\alpha} = 2\pi \sum_{\ell=1}^{n_c} (\hat{v}^{(\ell)} - \dot{v}^{(\ell)}) \zeta_\ell$$

La valeur du minimum est alors :  $g(\dot{\alpha}) = 4\pi^2 \|T_c(\dot{v} - \hat{v})\|^2$

4. Les minima obtenus sont finalement rangés par ordre croissant :

$$g(\dot{\alpha}_1) < g(\dot{\alpha}_2) < \dots$$

Remarque : puisque  $g(\dot{\alpha}) = 4\pi^2 \|T_c(\dot{v} - \hat{v})\|^2$ , le minimiseur global de  $g$ ,  $\check{\alpha} \stackrel{\text{set}}{=} \dot{\alpha}_1$ , correspond au point  $\check{v} \stackrel{\text{set}}{=} \dot{v}_1$  du réseau  $\mathbb{Z}^{n_c}$  pour lequel  $\|T_c(\dot{v} - \hat{v})\|^2$  est minimum.

Le problème NLP consiste à rechercher  $\dot{v}$  qui minimise cette distance :

$$\|T_c(\dot{v} - \hat{v})\|^2 = (\dot{v} - \hat{v} \mid [T_c]^t [T_c](\dot{v} - \hat{v}))$$

La solution  $\check{v}$  est donc le point de  $\mathbb{Z}^{n_c}$  le plus proche de la ‘solution flottante’  $\hat{v}$ , relativement à la distance induite par la forme quadratique  $[T_c]^t [T_c] = [\mathcal{V}_c]^{-1} = [S_c]^t [\mathcal{V}]^{-1} [S_c]$

# Imagerie par "auto-calibration" de phase

$$V_d \stackrel{\text{def}}{=} \rho_d e^{i\varphi_d} \quad V_m \stackrel{\text{def}}{=} \rho_m e^{i\varphi_m}$$

$$\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_d - \varphi_m$$

$$\varphi_c = \varphi - B\alpha_\varphi \text{ où } \alpha_\varphi = B_{\text{st}}^{-1} Q_{\text{st}} \varphi$$

$$\widehat{\varphi}_c \stackrel{\text{def}}{=} \text{arc}(\varphi_c)$$

$\check{\alpha}$  : minimiseur de  $\|\text{arc}(\widehat{\varphi}_c - B\alpha)\|_w^2$   
(pour rapprocher  $\varphi_{mc}$  de  $\varphi_{dc}$ )

$$\alpha_{d\star} = \check{\alpha} + \alpha_\varphi$$

$$\varepsilon_\star \stackrel{\text{def}}{=} \text{arc}(\widehat{\varphi}_c - B\check{\alpha})$$

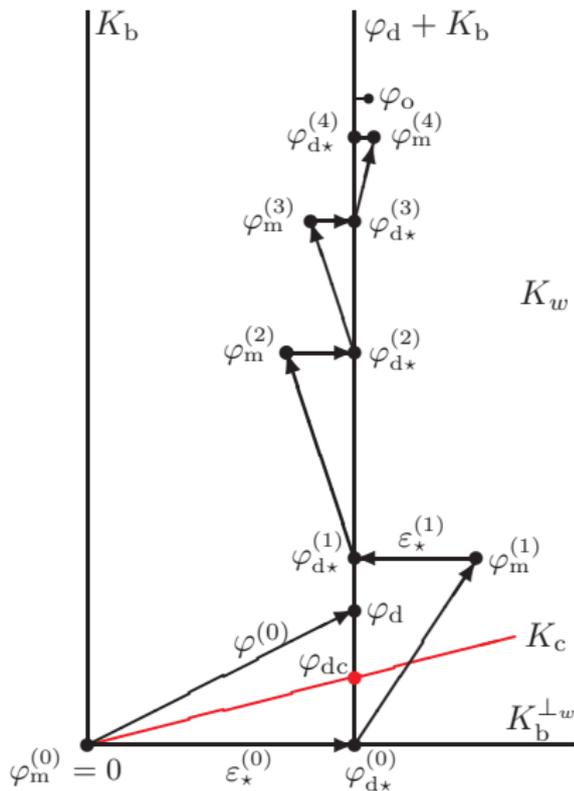
Visib. calibrée :  $V_{d\star} \stackrel{\text{def}}{=} V_d e^{-i[B\alpha_{d\star}]}$

$$\varphi_{d\star} = \varphi_d - B\alpha_{d\star} = \varphi_m + \varepsilon_\star$$

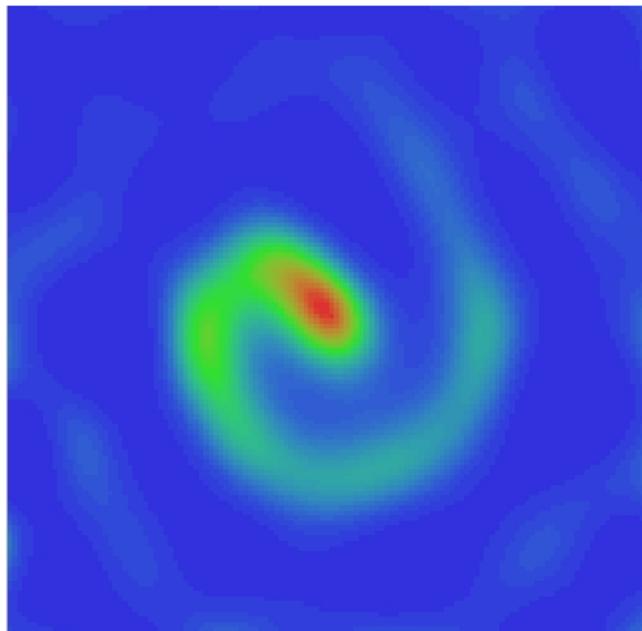
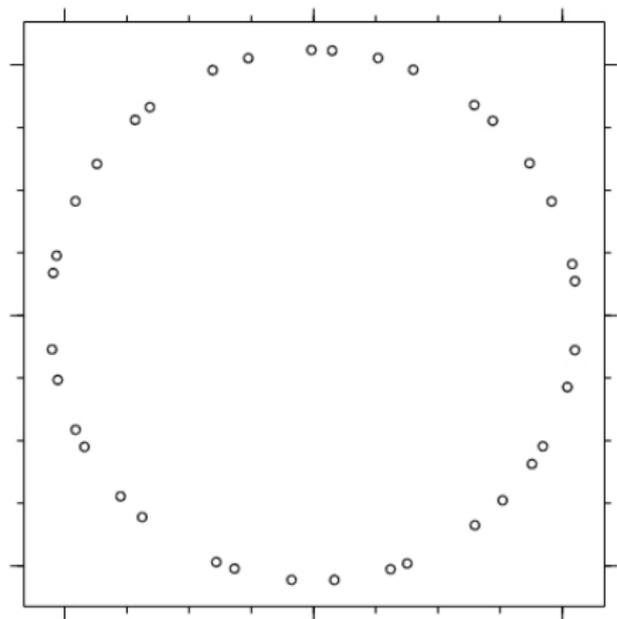
**Autocalibration :**  $\varphi_m := \varphi_{d\star}$

**Synt. de Fourier :**  $\varphi_{d\star}^{(q)} \rightarrow \varphi_m^{(q+1)}$

Convergence quand  $\varphi_{mc}^{(q)} \simeq \varphi_{dc}$   
(i.e.  $\widehat{\varphi}_c = 0$ )



# Image restaurée de WR 104



## Interacting Binary Wind Model of Spiral Outflow Around WR 104

