

*Thèse d'habilitation à diriger des recherches*  
*Contribution en Signal, Image et Instrumentation pour l'Astronomie*

**Annexe E : Introduction à la calibration de réseaux GNSS**

*Habilitation thesis, "Accreditation to supervise research"*  
*Contribution to Signal, Image & Instrumentation in Astronomy*

**Appendix E : Introduction to the calibration of GNSS networks**

Jean-Louis Prieur

*Version 27 mai 2014*

Mots clés :

Techniques : positionnement par satellite (GPS), réseaux GNSS globaux

Techniques : moindres carrés entiers (ILS), point du réseau le plus proche (NLP) – Géolocalisation – GNSS

Keywords :

Techniques : Global Positioning System (GPS), GNSS global networks,

Techniques : Integer Least Squares (ILS), Near-Lattice-Point (NLP) – geodetic positioning – GNSS

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Introduction à la navigation par satellite</b>	<b>1</b>
I.1	Principaux systèmes de navigation en opération	1
I.2	Système NAVSTAR/GPS : principes de base	2
I.3	Mesures GPS	5
I.3.1	Mesure de pseudo-distance	5
I.3.2	Mesure de phase	6
I.3.3	Mesure de décalage Doppler	6
I.3.4	Exemple d'un récepteur GPS simplifié	6
I.3.5	Positionnement temps réel de cibles en mouvement	8
I.4	Equations des données de code et de phase	8
I.4.1	Equation simplifiée des données de code $P$	9
I.4.2	Equation simplifiée des données de phase $\Phi$	9
I.4.3	Equations complètes des données de phase $\Phi$ et de code $P$	9
I.4.4	Autre formulation des équations de phase $L$ et de code $P$	10
<b>II</b>	<b>Calibration de réseaux GNSS</b>	<b>11</b>
II.1	Présentation du problème	11
II.2	Résolution d'ambiguïtés entières en GNSS	12
II.3	Doubles différences et relations de clôture	12
II.4	Auto-calibration et synthèse d'ouverture en radio-astronomie	12
<b>A</b>	<b>Rappels mathématiques</b>	<b>15</b>
A.1	Déterminants	15
A.2	Matrices unimodulaires	15
A.3	Bases réduites LLL	16
A.4	Résolution d'ambiguïtés entières	16
A.5	Défaut de $\mathbf{Q}$ -orthogonalité	17
<b>B</b>	<b>Introduction à la relativité et corrections relativistes pour le GPS</b>	<b>19</b>
B.1	Rappels de mécanique	19
B.1.1	Systèmes isolés	19
B.1.2	Référentiels inertiels	19
B.2	Relativité galiléenne	20
B.2.1	Transformations de Galilée	21
B.3	Relativité restreinte	21
B.3.1	Transformations de Lorentz	21

B.3.2	Intervalle d'espace-temps et cône de lumière . . . . .	23
B.3.3	Espace-temps de Minkowski . . . . .	24
B.3.4	Ligne d'univers . . . . .	24
B.3.5	Temps propre . . . . .	24
B.4	Relativité générale . . . . .	25
B.4.1	Principe d'équivalence . . . . .	25
B.4.2	Géométrie de l'espace-temps . . . . .	25
B.4.3	Décalage Doppler gravitationnel . . . . .	26
B.5	Effets relativistes pour le GPS . . . . .	26
B.5.1	Calcul de la vitesse moyenne des satellites GPS . . . . .	26
B.5.2	Retard des horloges embarquées dû au mouvement des satellites (relativité restreinte) . . . . .	28
B.5.3	Avance des horloges embarquées due au champ de gravitation de la Terre (relativité générale) . . . . .	28
	<b>Bibliography</b>	<b>31</b>
	<b>Index</b>	<b>33</b>
	<b>Glossaire</b>	<b>35</b>

# Chapitre I

## Introduction à la navigation par satellite

Au cours de ces vingt dernières années, le système américain GPS (Global Positioning System) a trouvé un champ d'application considérable dans des domaines très divers, comme par exemple l'aide à la navigation (sur terre, sur mer et dans les airs), la géophysique, et la géodésie. Les exigences en terme de précision et de rapidité (temps réel) ne sont plus une particularité réservée aux applications stratégiques, de type militaire.

Un positionnement différentiel rapide et très précis par GNSS (Global Navigation Satellite System) n'est possible actuellement que par l'utilisation de mesures très précises de la phase de la fréquence porteuse ("carrier phase measurements"). La résolution du problème exige alors la détermination d'ambiguïtés entières, correspondant au nombre entier de cycles de la fréquence porteuse sur chaque trajet récepteur-satellite. Lorsque ces ambiguïtés entières ont été déterminées, les mesures de phase peuvent être traitées comme celles du code pour conduire alors à des mesures de "pseudo-distances" très précises.

### I.1 Principaux systèmes de navigation en opération

Le premier système de navigation par satellite a été le système TRANSIT, entre 1960 et 1970, avec une précision de 1 km seulement, mais qui était suffisant pour la navigation maritime en haute mer. Son successeur a été ensuite le système **GPS** (Global Positioning System) appelé plus précisément **NAVSTAR** (NAVigation Satellite Timing And Ranging), qui a conduit à une amélioration considérable de la précision, pour répondre à des besoins militaires. En fait l'intérêt stratégique et les enjeux économiques d'un tel système sont si importants que de nombreuses autres nations ont rapidement souhaité de développer leurs propres systèmes de positionnement et de navigation. Actuellement, il y a deux systèmes accessibles au grand public : GPS/NAVSTAR et le système russe **GLONASS**.

**GPS** : NAVSTAR Global Positioning System, opéré par l'armée américaine, il est opérationnel depuis 1995 (le premier satellite fut lancé en 1978). Il comporte actuellement une trentaine de satellites, de masse comprise entre 800 kg et 1.8 t, sur des orbites situées à 20200 km d'altitude (voir Table I.1). Deux fréquences sont utilisées (1.6 et 1.2 Ghz) Les messages envoyés par chaque satellite comportent des informations diverses (qui peuvent être masquées en cas de conflit) et un signal produit par l'horloge atomique embarquée. La précision standard pour le système ouvert au public est de l'ordre de 10 m.

Le système géodésique de référence est le système WGS-84 (World Geodesic System révisé

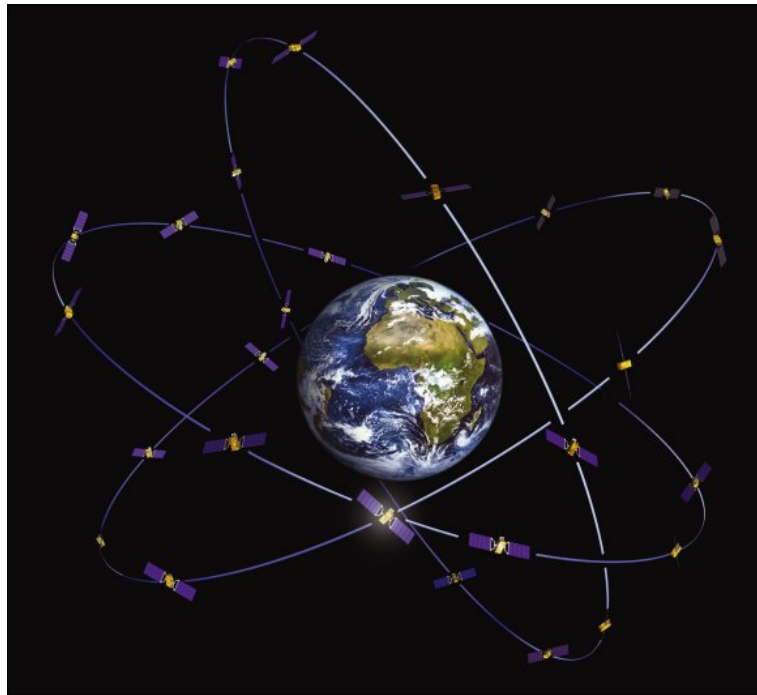


FIG. I.1: Future constellation de satellites GALILEO (ESA).

en 1984, dont la référence est la position du pôle nord en 1984)

**GLONASS** : géré par l'Agence Spatiale Fédérale Russe (1/3 du budget en 2010 !), il est opérationnel depuis 1995 (le premier satellite fut lancé en 1982). Il dispose d'une vingtaine de satellites (de 800 kg à 1.4 t), sur des orbites à 19100 km d'altitude (voir Table I.1). Les fréquences L1 et L2 sont différentes selon le satellite :  $L1 = 1602 + n \times 0.5625$  MHz et  $L2 = 1246 + n \times .4375$  MHz, où  $n = 0, 1, 2, \dots$  est le numéro de canal (frequency channel number). La précision est comparable au système GPS, de l'ordre de 10 m.

Le système de référence est le système PZ-90 (position moyenne du pôle nord entre 1900 et 1905), ce qui pose parfois des problèmes de raccordement par rapport au système NAVSTAR américain.

Notons que GLONASS est maintenant accessible avec la plupart des récepteurs grand public (Samsung, Apple, etc).

D'autres systèmes sont en cours de développement en Chine (**Beidou/Compass**), en Europe (**Galileo**) et en Inde (**IRNSS**). L'intégration de ces systèmes devrait conduire à un système mondial appelé **GNSS** (Global Navigation Satellite System) qui offrira une plus grande couverture, une plus grande fiabilité et une meilleure précision des résultats.

## I.2 Système NAVSTAR/GPS : principes de base

Dans le système NAVSTAR/GPS, deux ondes porteuses sont utilisées, L1 à 1.6 Ghz et L2 à 1.2 Ghz, de longueurs d'onde respectives 19 et 24 cm (situées de part et d'autre de la raie à 21cm (1.420 GHz) de l'hydrogène neutre utilisée en radio-astronomie... :

- L'onde porteuse L1 est modulée par plusieurs codes et par un message contenant diverses informations, (éphémérides du satellite émetteur, corrections d'horloge, don-

## I.2. SYSTÈME NAVSTAR/GPS : PRINCIPES DE BASE

Nom	Altitude (km)	Période	Application	Orbite
GOCE	270	90mn	Géodésie	orbite basse
Hubble	610	100mn	Astronomie	orbite basse
Iridium	780	100mn	Téléphonie	orbite basse
Spot1	832	102mn	Téledétection	héliosynchrone
GLONASS	19100	11h15mn	GNSS	circulaire, $i = 65^\circ$
GPS	20200	11h58mn	GNSS	circulaire, $i = 55^\circ$
GALILEO	23200	12h	GNSS	circulaire, $i = 56^\circ$
Astra 1	35798	23h56mn	Télévision	géostationnaire

TAB. I.1: Comparaison des orbites de quelques satellites



FIG. I.2: Quelques récepteurs GNSS



FIG. I.3: Réseaux de récepteurs GPS en Islande (Univ. Arizona) et en Grande-Bretagne (Ordonance Survey).



FIG. I.4: Stations du réseau permanent européen EUREF, ayant pour but de définir le "système de référence terrestre européen" (ETRS89). A droite, stations GPS du réseau EUREF à Toulouse : à Météo France-CNRM et au CNES.



nées pour la correction ionosphérique, et messages spéciaux du système). Deux codes sont émis par tous les satellites sur L1 : **code C/A** (Clear/Access or Coarse Acquisition) à  $f_0/10$  et un **code P** (Precise or Protected), devenu **code Y** en 1994, à  $f_0$  (avec  $f_0 = 10.23$  MHz,  $f_1 = 154f_0$  et  $f_2 = 120f_0$ ).<sup>1</sup>

- L’onde porteuse L2 est aussi modulée par le code P/Y, mais ne l’est pas par le code C/A. Sur les satellites les plus récents, l’onde L2 est modulée par le nouveau code civil L2C, pour permettre la correction d’effets ionosphériques, par une combinaison avec les mesures C/A sur L1.

La fréquence des ondes et la séquence des codes émis par chaque satellite sont contrôlées par l’horloge atomique installée à bord. Notons que sur les satellites les plus récents, un nouveau code M réservé aux militaires américains et à leurs alliés. est diffusé sur les porteuses L1 et L2. Enfin, les satellites NAVSTAR de la nouvelle génération IIF transmettent une nouvelle onde porteuse L5 (longueur d’onde 25 cm), qui est modulée par 2 codes civils (I5 et Q5). L’avantage d’utiliser au moins deux fréquences est de permettre la correction de biais d’origine ionosphérique. Ainsi, bien que crypté et réservé aux militaires, le code P/Y qui module les deux porteuses L1 et L2 est parfois utilisé pour obtenir des mesures de (pseudo-)distance, avec des techniques de corrélation qui permettent de contourner en partie le problème.

## I.3 Mesures GPS

Le système GPS permet des mesures de pseudo-distance, de phase de l’onde porteuse et de décalages Doppler.

### I.3.1 Mesure de pseudo-distance

La détermination du temps de propagation  $\Delta\tau$  d’un signal horaire depuis le satellite jusqu’au récepteur sur Terre, conduit à une mesure de **pseudo-distance** :  $d_p = \Delta\tau/c$ , où  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide. Cette mesure est affectée par des erreurs liées à la propagation de l’onde dans l’atmosphère et par des erreurs de synchronisation entre les horloges du satellite et du récepteur. La précision obtenue par les récepteurs les plus performants est de l’ordre de  $\pm 3$  m avec le code C/A avec l’onde L1. Elle peut atteindre  $\pm 0.3$  m avec les systèmes utilisant le code P/Y, qui présente l’avantage d’une fréquence dix fois supérieure à celle du code C/A, et l’utilisation des porteuses L1 et L2, à deux fréquences différentes qui permet l’estimation des retards ionosphériques.

La principale difficulté consiste à synchroniser les horloges des satellites avec celle du récepteur. Chaque satellite disposant d’une horloge atomique synchronisée avec l’horloge maître du système GPS, l’effort principal se fait au niveau du récepteur. Pour calculer une position (3 inconnues) et le décalage de l’horloge du récepteur par rapport à “l’heure GPS”, un minimum de 4 équations sont nécessaires, ce qui implique que le récepteur reçoive les signaux d’au moins 4 satellites.

Les mesures GPS exigeant une grande précision au niveau des horloges, il est nécessaire de prendre en compte des effets relativistes : relativité restreinte (le temps s’écoule moins

---

<sup>1</sup>Le code P dont la séquence était connue, et qui était utilisé au départ, a été complété en 1994 par un code secret W, pour des raisons de sécurité. Plus précisément, le code résultant est  $Y = P + W$ . C’est une combinaison anti-brouillage (A-S : Anti-Spoofing), qui permet d’éviter un brouillage du code Y en cas de conflit.



vite dans le référentiel du satellite qui est en mouvement à grande vitesse par rapport au référentiel des récepteurs situés sur Terre) et relativité générale (la gravité est plus faible au niveau des satellites engendre un écoulement du temps plus rapide que celui du récepteur). En conséquence, les fréquences émises par les satellites doivent être légèrement décalées ( $4.46 \cdot 10^{-9}$ , soit un décalage de  $38.6 \mu\text{s}$  par jour).

Une autre source d'erreur provient d'une mauvaise estimation de la vitesse de propagation de l'onde. Pour accroître la précision de la géolocalisation, il est nécessaire d'introduire des corrections liées à la traversée des couches basses de l'atmosphère (la troposphère) et dans l'ionosphère située à haute altitude. Dans la troposphère, la présence d'humidité et de gradients de température et de pression modifient l'indice de réfraction  $n = c/v$ , qui a une influence directe sur la vitesse  $v$  de propagation de l'onde. La propagation des ondes dans l'ionosphère, qui correspond à une couche ionisée par le rayonnement solaire, est fortement perturbée en période de forte activité du magnétisme solaire. Pour corriger cet effet, certains récepteurs bi-fréquence utilisent le fait que les deux fréquences L1 et L2 ne sont pas affectées de la même façon par la perturbation d'origine ionosphérique (voir Sect. I.4).

### I.3.2 Mesure de phase

La mesure de phase de l'onde porteuse consiste à comparer la phase de l'onde détectée par le récepteur avec celle d'une onde générée à l'intérieur du récepteur. Cette mesure angulaire  $\Delta\phi$  est généralement convertie en mètres, en utilisant la longueur d'onde  $\lambda$  de l'onde :  $\Delta\phi_\phi = \Delta\phi \lambda$ . Si on suppose que les horloges sont parfaitement synchronisées, il existe un décalage indétectable correspondant au nombre entier  $N$  de longueurs d'onde contenues dans la distance satellite-récepteur. Pour l'instant initial  $t = 0$  on a :

$$d_\phi(t_0) = [\Delta\phi(t_0) + 2\pi N] \lambda$$

$N$  est appelée **ambiguïté de phase initiale**. La valeur de  $N$  est inconnue, mais le récepteur est en mesure de compter le nombre entier de cycles (et sa partie fractionnaire) cumulés depuis  $t_0$ , s'il n'y a pas d'interruption dans l'observation du signal en provenance du satellite. Ces interruptions, appelées **sauts de cycles**, peuvent être causées par des obstructions sur le trajet satellite-récepteur, (arbres, bâtiments, par exemple). La mesure de phase est donc une mesure très précise de la variation de la distance satellite-récepteur depuis  $t_0$ . Lorsqu'on parvient à déterminer l'ambiguïté de phase initiale, la mesure de la distance atteint une précision de quelques millimètres.

### I.3.3 Mesure de décalage Doppler

Le décalage Doppler est la différence entre la fréquence du signal reçu et la fréquence nominale de transmission correspondant au mouvement relatif entre le satellite et le récepteur. Cette mesure peut être utilisée pour mesurer la vitesse d'un récepteur mobile, ou pour corriger des sauts de cycles.

### I.3.4 Exemple d'un récepteur GPS simplifié

Un récepteur simplifié utilisant sur le signal C/A de la porteuse L1, doit assurer les fonctions suivantes :

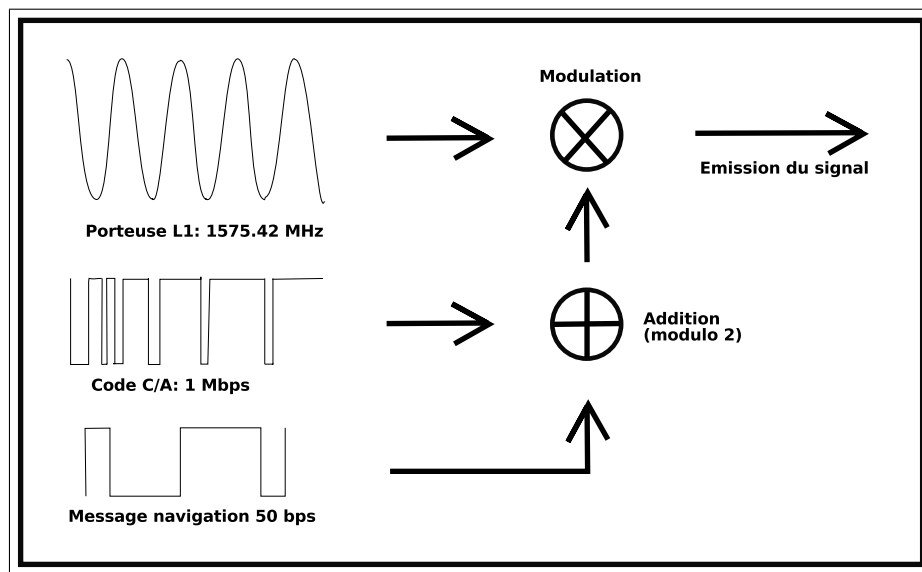


FIG. I.5: Schéma du signal C/A (GPS/NAVSTAR).

1. Réception par une antenne active, filtrage passe-bande centré sur 1575.42 Mhz, et amplification faible bruit (LNA, Low Noise Amplification)
2. Détection hétérodyne, échantillonnage et conversion A/N (Analog Digital Converter). Avec le circuit SE4110L par exemple : en sortie, signe et amplitude échantillonnés à 4.092 Mhz.
3. Calculateur DSP : DFT, corrélation avec DFT du code GPS, pour la détermination de la distance récepteur-satellite
4. Calcul de la position du récepteur (en utilisant des informations sur la position des satellites)

NB : Il existe des cartes électroniques (et même des circuits intégrés) intégrant toutes ces fonctions.

Le code C/A est unique pour chaque satellite (avec 31 possibilités au total). Les récepteurs actuels peuvent suivre un grand nombre de satellites simultanément sur des canaux séparés (typiquement, 12 canaux).

Le positionnement se fait par triangulation à partir des positions calculées des satellites, et nécessite un minimum de 4 satellites. La précision est meilleure lorsque les satellites sont bien répartis dans le ciel. La constellation des satellites GPS a été conçue pour répondre à ce critère. On utilise le paramètre GDOP (Geometric Dilution of Precision) pour quantifier l'effet de la distribution des satellites dans le ciel sur la précision  $\sigma$  d'un positionnement instantané (sans ambiguïté de phase) :

$$\sigma = \text{GDOP} \sigma_d \tag{I.1}$$

où  $\sigma_d$  est la précision des mesures de distance satellite-récepteur. Ce facteur peut être segmenté selon la position tri-dimensionnelle PDOP (Position Dilution Of Precision), la composante horizontale HDOP (Horizontal Dilution of Precision) et la composante verticale VDOP (Vertical Dilution of Precision). La constellation GPS a été conçue de façon que PDOP soit généralement inférieur à 6, en l'absence d'obstruction proche du sol masquant les satellites.

Notons que la précision horizontale est toujours meilleure que la précision verticale : VDOP est toujours plus grand que HDOP. En règle générale la précision pour l'altitude est environ deux fois moins grande que celle des coordonnées horizontales.

Le système de coordonnées GPS est le WGS84 (World geodesic System de 1984). L'altitude obtenue est ainsi mesurée par rapport à l'ellipsoïde de référence défini par le WGS84 (altitude géodésique)

### I.3.5 Positionnement temps réel de cibles en mouvement

Le système GPS permet d'aborder le positionnement temps réel de cibles en mouvement, appelé aussi cinématique temps réel (RTK : Real Time Kinematic) de deux façons différentes, en mode “code (or pseudo-range)” ou “mesure de phase” :

#### *Positionnement avec le code C/A*

Le positionnement peut se faire en utilisant le code C/A sur la porteuse L1. Ce code pseudo-aléatoire est émis avec une fréquence de 1 bit/ $\mu$ s. La précision maximale de l'électronique pour comparer deux signaux étant de l'ordre de 1% de la largeur d'un bit, on n déduit que la précision maximale du récepteur est de  $\tau = 0.01 \mu$ s, soit 3 m (puisque  $d = c\tau$  avec  $c = 300000$  km/s).

Le signal P/Y utilisé pour l'armée américaine émis a une fréquence dix fois supérieure (1 bit/100 ns), d'où une précision de 30 cm.

En fait il existe des erreurs plus importantes et l'utilisation d'un signal C/A conduit généralement à une précision moyenne de 15 m pour un récepteur civil.

#### *Technique RTK, avec la phase des porteuses L1 et L2*

Pour obtenir un positionnement plus précis, on utilise le signal analogique de la porteuse (modulée par le code émis) et non le code binaire contenu dans ce signal.

La phase du signal C/A+L1 peut changer à une fréquence de 1.023 MHz, alors que la porteuse L1 a une fréquence 1575.42 MHz. Donc pour une précision de 1%, la précision spatiale de 1.9 mm avec L1 (et 2.4 mm avec L2 à 1227.6 MHz).

Mais cette technique a un problème ambiguïtés entières sur le nombre entier de cycles parcourus (voir Sect. I.3.2), de l'ordre de  $\lambda \approx 20$  cm ( $\lambda = c/\nu = 3 \times 10^8 / 1.5 \times 10^9$ ).

En pratique, les systèmes RTK utilisent un récepteur fixe (station de base dont la position est connue précisément, qui réémet les corrections à apporter vers les récepteurs mobiles. La précision typique est de 1 cm et 2cm, pour un positionnement respectivement horizontal et vertical.

## I.4 Equations des données de code et de phase

Rappelons les données de base fournies par le système GPS/NAVSTAR :

- mesure de *code (or pseudo-range)* ou de “pseudo-distance” (pseudo-range) : c'est une mesure du décalage temporel entre les signaux de code émis et reçus. On en déduit une mesure grossière de la distance récepteur-émetteur du satellite (voir Sect. I.3.1).

- **mesure de phase de la porteuse** (carrier-phase measurement) : mesure de la distance récepteur-émetteur, exprimée en nombres de cycles de la fréquence porteuse. Cette mesure peut être faite avec une grande précision (de l'ordre du mm), lorsqu'on réussit à lever son ambiguïté, liée à l'incertitude du nombre entier de cycles effectués par l'onde lors de sa propagation entre le satellite et le récepteur. Cette ambiguïté ne peut pas être levée par une mesure instantanée (voir Sect. I.3.2).

### I.4.1 Equation simplifiée des données de code $P$

Pour chaque fréquence  $\nu = \nu_1, \nu_2$ , chaque époque  $t_k$  (indice  $k$ ) et chaque paire récepteur  $r_i$  émetteur  $s_j$  (indices  $i, j$ ) on a (Verhagen, 2005) :

$$P_\nu(i, j, k) = c [t(i, k) - t(j, k)] + \epsilon_\nu(i, j, k) \quad (\text{I.2})$$

- $P_\nu(i, j, t_k)$  : observations de code exprimées en mètres.
- $c$  : vitesse de la lumière dans le vide (en m/s).
- $t(i, k) = t_k$  : instant de réception pour le récepteur  $r_i$  (en s).
- $t(j, k)$  : instant d'émission du signal par l'émetteur  $s_j$  (en s).
- $\epsilon_\nu(i, j, k)$  : termes de bruit (en m).

On a donc :  $t(j, k) = t(i, k) - \tau(i, j)$ , où  $\tau(i, j)$  est la durée de propagation émetteur-récepteur.

$\tau(i, j)$  est estimé par l'émission puis le décodage d'un signal pseudo-aléatoire, connu par le satellite et le récepteur.

### I.4.2 Equation simplifiée des données de phase $\Phi$

Pour chaque fréquence  $\nu = \nu_1, \nu_2$ , chaque époque  $t_k$  (indice  $k$ ) et chaque paire récepteur  $r_i$  émetteur  $s_j$  (indices  $i, j$ ) on a (Verhagen, 2005) :

$$\Phi_\nu(i, j, k) = \Phi_{\nu,i}(t_k) - \Phi_{\nu,j}(t_k - \tau(i, j)) + N_\nu(i, j) + \varepsilon_\nu(i, j, k) \quad (\text{I.3})$$

- $\Phi_\nu(i, j, k)$  : observations de phase exprimées en cycles.
- $\Phi_{\nu,i}(t_k)$  : phase mesurée par le récepteur  $r_i$  à l'instant  $t_k$
- $\Phi_{\nu,j}(t_k - \tau(i, j))$  : phase lors de l'émission par l'émetteur  $s_j$
- $\tau(i, j)$  : durée de propagation émetteur-récepteur (en s)
- $N_\nu(i, j)$  : ambiguïtés de phase entières (indépendantes de  $t_k$  si accrochage PLL)
- $\varepsilon_\nu(i, j, k)$  : termes de bruit (en cycles)

### I.4.3 Equations complètes des données de phase $\Phi$ et de code $P$

Pour chaque fréquence  $\nu = \nu_1, \nu_2$ , chaque époque  $t_k$  (indice  $k$ ) et chaque paire récepteur  $r_i$  émetteur  $s_j$  (indices  $i, j$ ) on a (Teunissen & Kleusberg, 1998) :

$$\begin{cases} \Phi_{\nu,k}(i, j) &= \rho_{\Phi,k}(i, j) + T_k(i, j) - \kappa_\nu I_k(i, j) + c \delta t_{\Phi;\nu,k}^{(r)}(i) - c \delta t_{\Phi;\nu,k}^{(s)}(j) \\ &\quad + \lambda_\nu [\varphi^{(r)}(i) - \varphi^{(s)}(j) + N_\nu(i, j)] + \varepsilon_{\Phi;\nu,k}(i, j) \\ P_{\nu,k}(i, j) &= \rho_{P,k}(i, j) + T_k(i, j) + \kappa_\nu I_k(i, j) + c \delta t_{P;\nu,k}^{(r)}(i) - c \delta t_{P;\nu,k}^{(s)}(j) + \epsilon_{P;\nu,k}(i, j) \end{cases}$$

- $\Phi_{\nu,k}(i, j)$  observation de phase (de la porteuse) exprimée en mètres.
  - $\rho_{\Phi,k}(i, j), \rho_{P,k}(i, j)$  : distance récepteur  $r_i$  émetteur du satellite  $s_j$  (satellite  $s_j$  à l'instant  $t - \Delta t_k$  au moment de l'émission et récepteur  $r_i$  à l'instant  $t_k$  de la réception) ;
  - $T_k(i, j)$  et  $\kappa_{\nu} I_k(i, j)$  : retards de phase troposphériques et ionosphériques (avec  $\kappa_{\nu} = \lambda_{\nu}^2 / \lambda_1^2$ ).
  - $\delta t_{\Phi;\nu,k}^{(r)}(i), \delta t_{\Phi;\nu,k}^{(s)}(j)$  biais instrumentaux et erreurs d'horloge (en s) pour le récepteur  $r_i$  et l'émetteur  $s_j$  (en secondes).
  - $\varphi^{(r)}(i)$  et  $\varphi^{(s)}(j)$  : phases (en cycles) à l'origine des temps.
  - $N_{\nu}(i, j)$  : ambiguïtés de phase entières (constantes si accrochage PLL)
- La valeur moyenne des termes de bruit  $\varepsilon_{\Phi;\nu,k}(i, j)$  est supposée nulle.  $\varepsilon_{\Phi;\nu,k}(i, j), \varepsilon_{P;\nu,k}(i, j)$  : termes de bruit (tels que  $\langle \varepsilon_{\Phi;\nu,k}(i, j) \rangle = 0$ ) ;

#### I.4.4 Autre formulation des équations de phase $L$ et de code $P$

D'après Loyer et al. (2012) :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1 = D_1 + e + \Delta h_P + \Delta \tau_P \\ P_2 = D_2 + \gamma e + \Delta h_P + \gamma \Delta \tau_P \\ \lambda_1 L_1 = D_{L1} + \lambda_1 d_{windup} - e + \Delta h_L + \Delta \tau_L - \lambda_1 N_1 \\ \lambda_2 L_2 = D_{L2} + \lambda_2 d_{windup} - \gamma e + \Delta h_L + \gamma \Delta \tau_L - \lambda_2 N_2 \end{array} \right.$$

- $P_1, P_2$  observations de code (pseudo-range) en mètres pour les fréquences #1 et #2.
- $L_1, L_2$  observations de phase (porteur-phase) en cycles pour les fréquences #1 et #2.
- $D_1, D_2, D_{L1}, D_{L2}$  : distance récepteur-émetteur incluant les retards troposphériques, effets relativistes, Variations du Centre de Phase (PCV) et position des antennes. (PCV : Schmidt R., 2007, JGeod, 81, 781).
- $d_{windup}$  : déphasage dû à la rotation apparente du satellite (Kouba, 2009, "A guide to using GNSS service", IGS products)
- $e$  : retards de phase troposphériques pour la fréquence #1 en mètres.
- $\Delta h = h_i - h_j$ , avec  $h_i$  et  $h_j$  : biais d'horloge ("clock offset") du récepteur  $r_i$  et de l'émetteur  $s_j$  (en s)
- $\Delta \tau = \tau_i - \tau_j$ , avec  $\tau_i$  et  $\tau_j$  : biais de phase ("Time Group Delay") pour le récepteur  $r_i$  et l'émetteur  $s_j$  (en s)
- $N_{\nu}(i, j)$  : ambiguïtés de phase entières (constantes si accrochage PLL). "Phase Locked Loop" : boucle à verrouillage de phase.

# Chapitre II

## Calibration de réseaux GNSS

### II.1 Présentation du problème

Schéma général proposé pour la résolution du problème associant les équations de code et de phase :

$$f(\Psi) = 0 \quad \text{avec} \quad \Psi = \{\Phi, P\}$$

- Problème mixte : inconnues réelles  $x_k$  et entières  $v$   
Les inconnues entières  $v$  sont indépendantes de l'époque considérée  $t_k$  (dans l'intervalle de temps pour lequel on a obtenu un "acrochage de la phase" sans interruption ; PLL, Phase-Locked Loop) . On traite donc le problème de façon globale en prenant en compte toutes les observations obtenues dans un intervalle de temps donné. Le problème complet a un défaut de rang, que l'on peut lever en imposant des contraintes sur la solution recherchée (CAA par exemple : solution nulle pour les phases de biais).
- Pour annuler les aberrations de phase d'origine atmosphérique ou instrumentale, on introduit des "doubles différences" ("dd") ou plus généralement des "relations de clôture" ("cd", closure differences).
- La méthode QR de résolution permet de séparer les problèmes, en traitant d'abord le problème de résolution des ambiguïtés entières (matrice triangulaire résolue par substitutions successives) puis le problème des variables réelles.

Stratégie pour une résolution en "temps réel" :

1. Principe de base : *QR récursif* avec identification des variables *locales* (qui dépendent du temps) et *globales* (les autres) (voir [Lannes & Gratton \(2009\)](#) sur les réseaux).  
Exemple de variables locales : retards troposphériques, ionosphériques, erreurs d'horloges, etc.  
Exemple de variables globales : ambiguïtés  $N_\nu(i, j)$ , positions des stations, paramètres de dérive linéaire de ces positions, paramètres de description de la trajectoire des satellites, etc.
2. *Suivi époque par époque* de la matrice diagonale supérieure  $R$  relative aux variables globales, avec *gestion des transitions* (certaines variables globales changent, suite à l'apparition ou à la disparition de satellites).
3. Au terme d'un processus d'initialisation, on obtient l'état des variables locales *en temps réel*, en ne gérant que les transitions des variables locales.

## II.2 Résolution d’ambiguïtés entières en GNSS

- Deux problèmes imbriqués : problème "flottant" et problème "entier".  
Méthode **LAMBDA** : le problème entier n’est posé qu’après une première résolution flottante.  
Méthode QR : la séparation des deux problèmes se fait naturellement au cours de la résolution du problème.
- Dans les deux cas, on commence par déterminer la solution flottante  $\hat{v}$  du problème "entier" et sa matrice de variance-covariance  $V$
- Ensuite, détermination des ambiguïtés entières  $\check{v} = \operatorname{argmin}_{v \in Z^n} \|v - \hat{v}\|_Q$  avec  $Q = V^{-1}$ , en deux étapes :
  1. "décorrélation" (méthode LAMBDA) ou réduction du défaut d’orthogonalité de l’espace de travail (méthode **LLL**),
  2. recherche du point le plus proche du réseau (**NLP**).
- La solution  $\check{v}$  est ensuite utilisée pour résoudre le problème "flottant".

## II.3 Doubles différences et relations de clôture

Equations de phase en GNSS :

$$\Phi_{\nu,k}(i, j) = f_{\nu,k}(i, j) + g_{\nu}(j) - g_{\nu}(i) + \lambda_{\nu}N_{\nu}(i, j)$$

On reconnaît le même type d’équations que celles utilisées pour l’auto-calibration de phase en radio-astronomie :

$$\beta_e(i, j) = \beta_o(i, j) + \alpha(j) - \alpha(i) - 2\pi n_{i,j}$$

- $\beta_e(i, j)$  : mesure de la phase de la visibilité complexe
- $\alpha(i)$  : aberrations de phase pupillaires causées par la turbulence atmosphérique
- $\beta_o(i, j)$  : phase de la fréquence spatiale  $(u_i, u_j)$  de la TF de l’image à restaurer.

Dans le cas de réseaux GNSS, on peut réduire la taille du problème des ambiguïtés entières en combinant les données ("doubles différences" ou clôtures d’ordre supérieur), mais comme en astronomie, il est nécessaire d’introduire des contraintes supplémentaires pour lever le défaut de rang. En géodésie, nous proposons une contrainte "naturelle" consistant à prendre une solution nulle sur l’arbre maximal (approche CAA, Closure-Ambiguity Approach).

## II.4 Auto-calibration et synthèse d’ouverture en radio-astronomie

Annulation des contributions des aberrations de phase sur des boucles de clôture, en définissant de "relations de clôture" :

$$\beta_e(i, j) + \beta_e(j, k) - \beta_e(i, k) = \beta_o(i, j) + \beta_o(j, k) - \beta_o(i, k) - 2\pi(n_{i,j,k})$$

Résolution d’ambiguïtés entières  $n_{i,j,k}$  et auto-calibration de phase (estimation de  $\beta_o(i, j)$  et de phases d’aberration  $\alpha(i)$  compatibles avec l’image d’entrée).



#### *II.4. AUTO-CALIBRATION ET SYNTHÈSE D'OUVERTURE EN RADIO-ASTRONOMIE*

---

Il reste des incertitudes sur la fonction de phase de l'image (défaut de rang).

On résout le problème complet par itérations successives (auto-calibration et synthèse de Fourier), en introduisant des contraintes sur l'image.



# Annexe A

## Rappels mathématiques

### A.1 Déterminants

Soit  $B = [e_1, e_2, \dots, e_n]$  une base quelconque de  $\mathcal{Z}^n$ , et soit  $B_{[\ ]}$  la matrice dont les colonnes sont constituées par les coordonnées  $(e_{j,1}, e_{j,2}, \dots, e_{j,n})$  des vecteurs  $e_j$  dans la base standard  $\mathbf{B}$  de  $\mathcal{Z}^n$  :

$$B_{[\ ]} = \begin{bmatrix} e_{1,1} & e_{2,1} & \dots & e_{n,1} \\ e_{1,2} & e_{2,2} & \dots & e_{n,2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ e_{1,n} & e_{2,n} & \dots & e_{n,n} \end{bmatrix}$$

On a donc :  $B = \mathbf{B}M$ , avec  $M = B_{[\ ]}$ .

(Notons que  $M$  n'est pas une matrice unimodulaire en général).

**Propriété :** Le carré du volume  $V_{p(B)}$  du parallélépipède formé par les vecteurs d'une base  $B$  est égal à  $\det(B_{[\ ]}^T B_{[\ ]})$  :

$$V_{p(B)}^2 = \det(B_{[\ ]}^T B_{[\ ]})$$

### A.2 Matrices unimodulaires

**Définition :** une matrice entière est *unimodulaire* si son inverse est une matrice entière.

**Propriété caractéristique :** une matrice entière est unimodulaire ssi son déterminant est égal à  $\pm 1$ .

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### A.3 Bases réduites LLL

Pour une base quelconque  $B$  de  $\mathcal{Z}^n$ , avec  $B = \mathbf{B}M$ , on pose :  $Q = M^T \mathbf{Q} M$ .

Avec la factorisation  $Q = U^T D U$ , le logarithme du défaut de  $\mathbf{Q}$ -orthogonalité de la base  $B$  est égal à :

$$\ln(\delta_{\mathbf{Q}}(B)) = \frac{1}{2n} \sum_{j=2}^n \ln \left( 1 + \sum_{i=1}^{j-1} \frac{d_i}{d_j} u_{i,j}^2 \right)$$

Les critères de **Lenstra, Lenstra & Lovász (1982)** définis par :

$$\begin{aligned} |u_{i,j}| &\leq 1/2 \text{ pour } 1 \leq i < j \leq n \\ d_j + u_{j-1,j}^2 d_{j-1} &\geq \omega d_{j-1} \text{ pour } 2 \leq j \leq n \end{aligned}$$

avec  $1/4 \leq \omega < 1$ . Ces critères conduisent des bases à défaut de  $\mathbf{Q}$ -orthogonalité réduit (i.e.,  $\delta_{\mathbf{Q}}(B)$  proche de un).

*Ces bases réduites LLL sont donc bien adaptées à la résolution du problème NLP.*

#### Exemple de traitement

Données expérimentales :  $y'_k, \sigma_{y'_k}$

Problème complet de départ :  $\hat{x}' = \operatorname{argmin}_{x'} \|y' - A'x'\|'_S$

avec  $S'$  matrice diagonale :  $s'_{k,k} = 1/\sigma_{y'_k}$

Si redéfinition du problème en :  $\hat{x} = \operatorname{argmin}_x \|y - Ax\|_S$  avec  $A = LA'$  et  $y = Ly'$ , il faut prendre alors :  $S = L^T S' L$ .

Si la résolution du problème moindres-carrés avec la méthode  $QR$  conduit à  $Rx = z$ , la matrice de variance-covariance de la solution  $\hat{x}$  est  $V = R^{-1}$

### A.4 Résolution d'ambiguïtés entières

Recherche du point du réseau le plus proche (NLP, Near Lattice point)

Problème de base :

$$\check{v} = \operatorname{argmin}_{v \in \mathcal{Z}^n} \|v - \hat{v}\|_{\mathbf{Q}}^2$$

où  $\mathbf{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{V}^{-1}$ , avec  $\mathbf{V}$  matrice de variance-covariance de la solution flottante  $\hat{v}$  du problème.

$(v|v')_{\mathbf{Q}} \stackrel{\text{def}}{=} (v|\mathbf{Q}v')$  où  $(\cdot|\cdot)$  est le produit scalaire euclidien dans  $\mathbb{R}^n$ .

– Factorisation de Cholesky :  $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^T \mathbf{R}$  avec  $\mathbf{R}$  triangulaire supérieure

– Factorisation :  $\mathbf{R} = \mathbf{D}^{1/2} \mathbf{U}$  avec  $\mathbf{U}$  triangulaire supérieure telle que  $u_{j,j} = 1$ .

On a donc :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{U}^T \mathbf{D} \mathbf{U}$$

## A.5 Défaut de $\mathbf{Q}$ -orthogonalité

Soit  $B = [e_1, e_2, \dots, e_n]$  une base quelconque de  $\mathcal{Z}^n$  :

$$\delta_{\mathbf{Q}}(B) \stackrel{\text{def}}{=} \left( \frac{\prod_{j=1}^n e_j^T \mathbf{Q} e_j}{\det \mathbf{Q}} \right)^{1/(2n)}$$

$\delta_{\mathbf{Q}}(B)$  est le défaut de  $\mathbf{Q}$ -orthogonalité de la base  $B$ .

Puisque  $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^T \mathbf{R}$  :

$$\delta_{\mathbf{Q}}(B) = \left( \frac{\prod_{j=1}^n \|b_j\|}{\det \mathbf{R}} \right)^{1/(n)}$$

où  $b_j \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{R} e_j$

On a donc :

$$\delta_{\mathbf{Q}}(B) \geq 1$$

avec  $\delta_{\mathbf{Q}}(B) = 1$  pour une base orthogonale.

Soit  $M$  la matrice unimodulaire telle que :  $B = \mathbf{B}M$ , où  $\mathbf{B} = [e_1, e_2, \dots, e_n]$  est la base standard de  $\mathcal{Z}^n$ . On a alors :

$$\delta_{\mathbf{Q}}(B) = \left( \frac{\prod_{j=1}^n e_j^T Q e_j}{\det \mathbf{Q}} \right)^{1/(2n)}$$

avec  $Q = M^T \mathbf{Q} M$ .



# Annexe B

## Introduction à la relativité et corrections relativistes pour le GPS

### B.1 Rappels de mécanique

#### B.1.1 Systèmes isolés

Le vecteur *quantité de mouvement*  $\vec{p}$  d'un système donné est le produit de sa masse  $m$  et de sa vitesse  $\vec{v}$  :

$$\vec{p} = m \vec{v} \tag{B.1}$$

La quantité de mouvement d'un système constitué de plusieurs solides est la somme vectorielle des quantités de mouvement des solides constituant ce système.

Force : on appelle force toute action mécanique d'un corps sur un autre capable de produire des effets sur le mouvement ou la forme de ce deuxième corps.

Un système est dit *isolé* lorsqu'il n'est soumis à aucune force. Il est dit *pseudo-isolé* lorsque la résultante des forces s'y appliquant est nulle.

*Loi de conservation de la quantité de mouvement* : la quantité de mouvement d'un ensemble de corps isolés est conservée.

#### B.1.2 Référentiels inertiels

*Première loi de Newton<sup>1</sup>, ou principe d'inertie* : lorsqu'un solide est isolé ou pseudo-isolé, il existe toujours un point particulier  $G$  du solide, appelé *centre d'inertie*, qui garde au cours du temps, la vitesse  $\vec{v}_0$  qu'il avait à l'instant origine ( $t = 0$ ) :

$$\forall t > 0 \quad \vec{v}_G(t) = \vec{v}_0$$

Si on décompose un corps solide en un très grand nombre d'éléments de petite taille, de masse  $m_k$ , la position du centre d'inertie peut être calculée à partir d'une somme pondérée

---

<sup>1</sup> Deuxième loi de Newton :  $d\vec{p}/dt = m\vec{v}/dt$  (si masse constante, i.e.,  $dm/dt = 0$ ). Troisième loi de Newton : principe d'action/réaction : lorsqu'un solide A exerce sur un solide B une force  $\vec{F}_{A/B}$ , alors le solide B exerce sur A une force  $\vec{F}_{B/A}$  telle que  $\vec{F}_{B/A} = -\vec{F}_{A/B}$ .



par la masse des parties de l'objet. Dans le cas d'un objet monodimensionnel, l'abscisse du centre d'inertie est :  $x_{Gi} = \sum_k x_k m_k / \sum_k m_k$ . L'abscisse du centre de gravité est égale à  $x_{Gg} = \sum_k x_k m_k g_k / \sum_k m_k g_k$ . On confond souvent le centre de gravité et le centre d'inertie ( $x_{Gi} \approx x_{Gg}$ ), ce qui revient à supposer que le champ de gravitation est constant à l'échelle de l'objet ( $g_k = Cte$ ).

Un référentiel dans lequel le principe d'inertie est vérifié est dit *inertiel* ou *galiléen*.

Un référentiel galiléen est donc un référentiel dans lequel le centre d'inertie d'un objet isolé ou pseudo-isolé, est en *mouvement de translation rectiligne uniforme* : sa vitesse est constante, en direction et amplitude.

Exemples de référentiels galiléens :

- *Référentiel terrestre* : le principe d'inertie est vérifié pour des expériences d'une durée suffisamment courte pour pouvoir négliger la rotation de la Terre sur elle-même (typiquement quelques minutes).
- *Référentiel géocentrique* : il peut être considéré comme galiléen pour l'étude de mouvements dont la durée est suffisamment courte pour pouvoir négliger la rotation de la Terre autour du Soleil (typiquement quelques heures).
- *Référentiel héliocentrique* : c'est vraisemblablement le "meilleur" référentiel galiléen auquel nous avons accès. En effet, "l'année cosmique", i.e., la période orbitale du Soleil autour du centre de notre galaxie est estimée à 250 millions d'années environ.

## B.2 Relativité galiléenne

*“Enfermez-vous avec un ami dans la cabine principale à l'intérieur d'un grand bateau et prenez avec vous des mouches, des papillons, et d'autres petits animaux volants. Prenez une grande cuve d'eau avec un poisson dedans, suspendez une bouteille qui se vide goutte à goutte dans un grand récipient en dessous d'elle. Avec le bateau à l'arrêt, observez soigneusement comment les petits animaux volent à des vitesses égales vers tous les côtés de la cabine. Le poisson nage indifféremment dans toutes les directions, les gouttes tombent dans le récipient en dessous, et si vous lancez quelque chose à votre ami, vous n'avez pas besoin de le lancer plus fort dans une direction que dans une autre, les distances étant égales, et si vous sautez à pieds joints, vous franchissez des distances égales dans toutes les directions. Lorsque vous aurez observé toutes ces choses soigneusement (bien qu'il n'y ait aucun doute que lorsque le bateau est à l'arrêt, les choses doivent se passer ainsi), faites avancer le bateau à l'allure qui vous plaira, pour autant que la vitesse soit uniforme [c'est-à-dire constante] et ne fluctue pas de part et d'autre. Vous ne verrez pas le moindre changement dans aucun des effets mentionnés et même aucun d'eux ne vous permettra de dire si le bateau est en mouvement ou à l'arrêt ...”* Galilée, Dialogue concernant les deux plus grands systèmes du monde, (1632).

Galilée observe que dans la cale d'un navire, aucune expérience de mécanique ne permet de distinguer que le navire est immobile ou en mouvement uniforme. Cette constatation sera formalisé quelques siècles plus tard sous le nom de *principe de relativité galiléenne* : les lois physiques de la mécanique sont identiques dans tous les référentiels inertiels.

### B.2.1 Transformations de Galilée

Soient  $(t, x, y, z)$  les coordonnées spatio-temporelles d'un point  $P$  dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ , et soient  $(t', x', y', z')$  les coordonnées de ce même point dans un autre référentiel galiléen  $\mathcal{R}'$ , en mouvement de translation avec une vitesse constante  $\vec{v}$  dans la direction  $x$  relativement à  $\mathcal{R}$ . Les **transformations de Galilée** permettent de lier les systèmes de coordonnées de ces deux référentiels galiléens en mécanique newtonienne :

$$\begin{cases} t = t' \\ x = x' + vt' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Ces équations peuvent être considérées comme une approximation des transformations de Lorentz, en prenant  $1/c \approx 0$  (voir Sect. B.3.1). Mais elles supposent l'additivité des vitesses, dont une conséquence est que n'importe quelle vitesse peut être atteinte, et qui entrera en contradiction avec les équations du champ électromagnétique de Maxwell qui impliquent que la vitesse de la lumière est constante dans tous les référentiels.

## B.3 Relativité restreinte

La **relativité restreinte** est la théorie élaborée par (Einstein, 1905) est une extension de la **relativité galiléenne** (Sect. B.2) qui prend en compte le principe selon lequel la lumière se propage dans le vide à une vitesse constante, principe implicitement contenu dans les équations de Maxwell, et vérifié expérimentalement. Cette théorie est basée sur les deux postulats suivants (Einstein, 1905) :

- Les lois de la physique ont la même forme dans tous les référentiels inertiels
- La vitesse de la lumière dans le vide a la même valeur dans tous les référentiels inertiels.

Le premier postulat est le principe de relativité dans sa conception **restreinte** à la classe des référentiels inertiels. Il formalise la constatation de Galilée selon lequel il n'était pas possible de distinguer dans la cale d'un bateau s'il était à l'arrêt ou en mouvement rectiligne uniforme (voir Sect. B.2). Il va au-delà en incluant l'invariance des équations de Maxwell par changement de référentiel inertiel. Son article fondateur paru en 2005 s'appelle d'ailleurs "De l'électrodynamique des corps en mouvement". Le second postulat est une conséquence directe du premier, puisque les équations de maxwell conduisent à prédire une vitesse constante  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  pour la propagation des ondes électromagnétiques dans le vide.

La relativité restreinte ne considère que le cas des référentiels inertiels (voir Sect. B.1). Les autres référentiels sont traités par la **relativité générale** (voir Sect. B.4).

En écrivant l'expression de l'énergie cinétique au repos d'un corps de masse  $m$ , en respectant le principe de relativité, Einstein a fait apparaître le concept d'énergie au repos dans son équation célèbre :  $E = m c^2$ .

### B.3.1 Transformations de Lorentz

Soient  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  deux référentiels galiléens, tels que  $\mathcal{R}'$  est en mouvement de translation avec une vitesse constante  $\vec{v}$  dans la direction  $x$  relativement à  $\mathcal{R}$ . On suppose de plus que

les horloges de chaque référentiel indiquaient toutes les deux  $t = 0$  et  $t' = 0$  lorsque les origines spatiales  $O$  et  $O'$  des deux référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  étaient confondues. Les deux postulats d'Einstein (Sect. B.3) conduisent aux transformations dites **de Lorentz** qui permettent d'exprimer les coordonnées spatio-temporelles  $(t, x, y, z)$  dans un événement donné dans le référentiel "fixe"  $\mathcal{R}$  en fonction des coordonnées  $(t', x', y', z')$  du même événement dans le référentiel "mobile"  $\mathcal{R}'$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} t = \gamma(t' + v x'/c^2) \\ x = \gamma(x' + v t') \\ y = y' \\ z = z' \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} t' = \gamma(t - v x/c^2) \\ x' = \gamma(x - v t) \\ y' = y \\ z' = z \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (\text{B.3})$$

Considérons deux événements quelconques  $e_0$  et  $e_1$  de coordonnées  $(t_0, x_0, y_0, z_0)$  et  $(t_1, x_1, y_1, z_1)$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  et de coordonnées  $(t'_0, x'_0, y'_0, z'_0)$  et  $(t'_1, x'_1, y'_1, z'_1)$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ . Posons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta t = t_1 - t_0 \\ \Delta x = x_1 - x_0 \\ \Delta y = y_1 - y_0 \\ \Delta z = z_1 - z_0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta t' = t'_1 - t'_0 \\ \Delta x' = x'_1 - x'_0 \\ \Delta y' = y'_1 - y'_0 \\ \Delta z' = z'_1 - z'_0 \end{array} \right. \quad (\text{B.4})$$

Il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} c\Delta t' = \gamma(c\Delta t - \beta \Delta x) \\ \Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta c \Delta t) \\ \Delta y' = \Delta y \\ \Delta z' = \Delta z \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \beta = v/c \quad (\text{B.5})$$

soit, sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} c\Delta t' \\ \Delta x' \\ \Delta y' \\ \Delta z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

Les transformations de Lorentz traduisent de façon mathématique les deux postulats d'Einstein. Elles conduisent à une vision révolutionnaire de la physique et font apparaître des phénomènes qui heurtent parfois le "sens commun".

Par exemple, les mesures de longueur, d'intervalle de temps (et donc de vitesse) dépendent du référentiel de l'observateur. Mesurer la longueur d'un wagon en mouvement donne des résultats différents selon qu'on se trouve dans le wagon, ou sur le quai (mais ce n'est pas le cas pour la largeur du wagon, qui est perpendiculaire au vecteur vitesse du déplacement, et qui n'est pas affectée par ce mouvement).

La notion de temps absolu disparaît aussi (voir Sect. B.3.5). Deux horloges de fabrication identique, situées dans deux référentiels inertiels différents, ne battent généralement pas au même rythme, et il est alors impossible de les garder synchronisées.

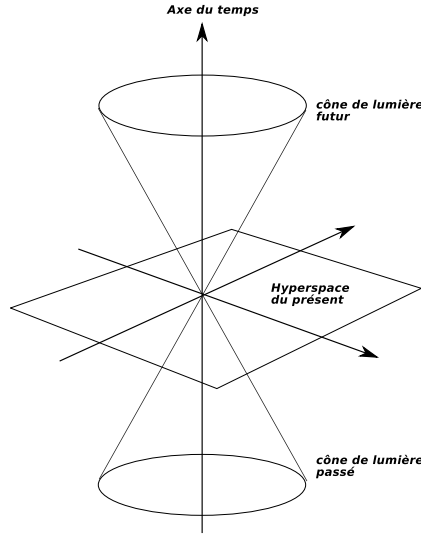


FIG. B.1: Cône de lumière centré sur un événement donné  $e_0$ , dont l'équation est  $\Delta s^2 = 0$ .

### B.3.2 Intervalle d'espace-temps et cône de lumière

D'après les équations (B.6), on en déduit que :

$$-(c \Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = -(c \Delta t')^2 + (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2$$

Il en résulte que le “carré de l'intervalle espace-temps”, défini par :

$$\Delta s^2 = (c \Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \quad (\text{B.7})$$

ou aussi

$$\Delta s^2 = (c \Delta t)^2 - \Delta \ell^2 \quad \text{avec} \quad \Delta \ell^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \quad (\text{B.8})$$

Les transformations de Lorentz conservent donc la quantité  $\Delta s^2$ , appelée aussi **invariant d'espace-temps** ; sa valeur ne dépend pas du référentiel inertiel dans lequel on le calcule. C'est une conséquence du premier postulat de la relativité restreinte : *l'intervalle d'espace-temps entre les deux événements est le même dans tous les repères inertiels.*

Remarquons que cette expression (B.7) n'est pas une “distance” classique, et peut conduire à des valeurs nulles ou négatives. Par exemple,  $\Delta s^2$  est nul pour deux points du parcours d'un rayon lumineux. L'équation  $\Delta s^2 = 0$ , ou encore  $(c \Delta t)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$ , est celle d'un cône dans l'espace-temps, appelé le **cône de lumière** dont l'axe de symétrie est l'axe du temps (voir Fig B.1). Les événements  $e_1$  situés sur ce cône ne peuvent être joints depuis  $e_0$  que par un message allant à la vitesse de la lumière.

Pour les événements  $e_1$  situés à l'intérieur du cône, on a :  $\Delta s^2 > 0$  soit  $(c \Delta t)^2 > \Delta \ell^2$ , et donc pour  $\Delta t$  non nul  $\Delta \ell / \Delta t < c$ . Il existe un “chemin” entre  $e_0$  et  $e_1$  qui peut être parcouru avec une vitesse inférieure à la vitesse de la lumière. Il existe donc une possibilité d'échange d'information et par conséquent de “relation de causalité” entre ces deux événements.

Inversement, pour les événements  $e_1$  situés à l'extérieur du cône, on a :  $\Delta s^2 < 0$  soit  $(c \Delta t)^2 < \Delta \ell^2$ , et donc pour  $\Delta t$  non nul  $\Delta \ell / \Delta t > c$ . Tous les “chemins” entre  $e_0$  et  $e_1$  ne sont parcourus qu'avec une vitesse supérieure à la vitesse de la lumière, ce qui exclut toute possibilité d'échange d'information et par conséquent de “relation causale directe” entre ces deux événements.

### B.3.3 Espace-temps de Minkowski

La théorie de la relativité restreinte fait apparaître la dépendance des variables temporelles et spatiales, et la nécessité de prendre en compte un espace à quatre dimensions, appelé *espace-temps de Minkowski*.

En géométrie euclidienne, la distance  $\Delta\ell$  entre deux points de coordonnées  $(x, y, z)$  et  $(x', y', z')$  est donnée par :

$$(\Delta\ell)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \quad \text{où } \Delta x = x' - x, \Delta y = y' - y \text{ et } \Delta z = z' - z.$$

Dans l'espace-temps de Minkowski, la distance entre deux points repérés par les coordonnées  $(t, x, y, z)$  et  $(t', x', y', z')$  est définie par l'équation (B.7) :

$$(\Delta s)^2 = -(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \quad \text{où } \Delta t = t' - t.$$

Cet espace, de courbure nulle, est un espace pseudo-euclidien.

### B.3.4 Ligne d'univers

La **ligne d'univers** d'un objet est sa trajectoire dans un espace-temps à 4 dimensions. C'est donc un chemin séquentiel d'événements qui caractérise l'histoire d'un objet dans un référentiel donné. En relativité générale les lignes d'univers de particules-test sont appelées des géodésiques.

### B.3.5 Temps propre

Le **temps propre**  $\tau$  d'une particule est le temps mesuré dans le repère de cette particule (i.e., repère où cette particule est immobile). En relativité restreinte, l'intervalle de temps propre  $\Delta\tau$  séparant deux événements est l'intervalle de temps  $\Delta t$  dans un **référentiel inertiel** où ils ont lieu au même endroit de l'espace.

Considérons une fusée se déplaçant librement dans l'espace en ayant coupé tous ses moteurs, et loin de toute source de gravitation. Sa cabine peut donc être associée à un référentiel inertiel local  $\mathcal{R}_{local}$ . Supposons qu'elle émette des éclairs à intervalles de temps réguliers commandés par une horloge située dans l'habitacle, qui donne le **temps propre** de la fusée. Soit  $\Delta\tau$  cet intervalle temporel local entre deux éclairs successifs, mesuré dans le référentiel  $\mathcal{R}_{local}$ .

Considérons un autre référentiel inertiel  $\mathcal{R}_1$  depuis lequel d'autres observateurs voient passer devant eux la fusée à vitesse constante  $v_1$ . Dans ce référentiel, l'intervalle entre deux événements correspondant aux observations successives de ces éclairs est caractérisé par la distance spatiale  $\Delta\ell_1$  entre les deux endroits où ont été vus les éclairs et la distance temporelle  $\Delta t_1$ . On a de plus :  $\Delta\ell_1 = v_1 \Delta t_1$

La distance spatio-temporelle entre les deux événements étant la même dans tous les repères inertiels (cf Eq. B.7), on a :

$$(c\Delta\tau)^2 = (c\Delta t_1)^2 - (\Delta\ell_1)^2 = (c\Delta t_1)^2 - v_1^2 \Delta t_1^2$$

Il vient donc :

$$\Delta\tau = \Delta t_1 \sqrt{1 - v_1^2/c^2} = \gamma \Delta t_1 \tag{B.9}$$

On en déduit que  $\Delta\tau \leq \Delta t_1$ . L'écart temporel entre deux éclairs est plus long dans les référentiels extérieurs que dans la fusée. Pour un observateur extérieur, il y a une **dilatation du temps**, d'autant plus importante que la vitesse  $v_1$  de la fusée est grande.

## B.4 Relativité générale

La théorie de la gravitation universelle de Newton est basée sur la notion de force exercée par un corps sur un autre, dont la direction et l'amplitude sont déterminées par leur position relative à un instant donné. Cette force s'exerce de manière instantanée et a une portée infinie. Ce caractère instantané est en contradiction avec les principes de la relativité restreinte, impliquant qu'aucune information ne peut se propager plus vite que la vitesse de la lumière dans le vide. C'est ce qui a conduit Einstein à proposer une théorie de la gravitation compatible avec la relativité restreinte : *la relativité générale*.

### B.4.1 Principe d'équivalence

Une personne dans une cabine d'ascenseur en chute libre ressent l'apesanteur pendant toute la durée de la chute. Tous les objets situés dans la cabine l'accompagnent, ou se déplacent à vitesse constante par rapport à lui : on n'observe aucun effet gravitationnel. Toutes les expériences de mécanique (et même d'électromagnétisme) effectuées par un observateur en chute libre sont indiscernables des mêmes expériences effectuées dans un référentiel inertiel éloigné de toute source mesurable de gravitation.

Inversement, les effets gravitationnels peuvent être "provoqués" en soumettant une cabine fermée à une accélération constante. La "force d'inertie" engendrée par cette accélération sera indiscernable d'un champ de gravitation constant.

Le **principe d'équivalence** entre gravitation et accélération proposé par Einstein en 1907 est la base de sa théorie de la relativité générale.

Le premier postulat de la relativité restreinte disait :

- les lois de la physique sont les mêmes pour tous les observateurs se déplaçant dans un mouvement de translation uniforme (i.e. dans tous les référentiels inertiels).

En 1907, Einstein généralise ce postulat à tous les référentiels en chute libre :

- les lois de la physique sont les mêmes pour tous les observateurs situés dans des référentiels en chute libre. Il n'y a pas de différence entre les accélérations d'origine gravitationnelle et celles dues aux forces inertiels.

La relativité restreinte associait les variables spatiales et temporelles dans un espace-temps à l'aide de la lumière, mais laissait la matière inchangée. La relativité générale associe la matière et l'espace par une interaction entre les deux : l'espace-temps est modifié par la présence de la matière.

### B.4.2 Géométrie de l'espace-temps

En mécanique classique, les lois de Newton ont conduit à une description géométrique du mouvement selon le *principe de moindre action* : entre deux points donnés, un objet se déplace sur le chemin qui correspond au parcours de durée minimale.

Mais Einstein a montré que les variables spatiales et temporelles étaient liées entre elles et que seules les variables l'espace-temps avaient un sens. Selon *le principe de moindre action modifié*, entre deux événements donnés, un objet se déplace sur un trajet qui correspond au plus court chemin dans l'espace-temps.

Il est donc nécessaire de connaître les caractéristiques de cet espace-temps :

- En l’absence de matière, dans un espace “vide”, les chemins les plus courts correspondent à des lignes droites. Les objets se déplacent donc sur des trajets rectilignes. Interprétation de Newton : “*un corps se déplace en ligne droite lorsqu’il ne ressent aucune force le forçant à changer son mouvement*”.
- La présence de matière courbe l’espace environnant : (i) les chemins de moindre action sont des lignes courbes, (ii) un accroissement de la masse se traduit par une augmentation de la courbure, et (iii) la courbure s’accroît lorsqu’on se rapproche d’un corps massif. Au voisinage d’un corps massif, un corps en chute libre suit une trajectoire courbe. Interprétation de Newton : “*ce corps ressent une force le faisant dévier d’une trajectoire rectiligne*”.

Cette nouvelle théorie de la gravitation peut être résumée ainsi (d’après Archibald Wheeler, à qui on doit aussi le terme de “trou noir” dans les années 1960) :

- *La matière indique à l’espace-temps comment il doit se courber*
- *L’espace-temps courbe indique à la matière comment elle doit se mouvoir*

La théorie d’Einstein remplace le concept Newtonien de “force” par la courbure de l’espace-temps, comme agent de la gravitation.

Une des premières confirmations de la relativité générale a été la prédiction correcte de la précession de l’orbite de Mercure, de 574 secondes d’arc par siècle, alors que la théorie Newtonienne ne permettait d’expliquer qu’une précession de 531 secondes d’arc par siècle.

Une autre prédiction de cette théorie concerne la déflexion des rayons lumineux au voisinage d’un corps massif. La confirmation est venue dès 1919, lors d’une éclipse totale du Soleil : les observations ont montré un déplacement apparent des étoiles au voisinage du Soleil, sur des lignes passant par le centre du Soleil, dans un sens “centrifuge”.

On continue cependant à utiliser les lois de Newton, qui sont une très bonne approximation de la relativité générale pour les faibles champs gravitationnels et pour des déplacements à des vitesses très inférieures à la vitesse de la lumière. En effet les lois de Newton sont beaucoup plus simples à utiliser que la relativité générale, et sont suffisamment précises dans la plupart des situations rencontrées dans “la vie de tous les jours”. Une exception notable est désormais la navigation par satellite, comme nous le verrons dans la section **B.5**.

### B.4.3 Décalage Doppler gravitationnel

## B.5 Effets relativistes pour le GPS

### B.5.1 Calcul de la vitesse moyenne des satellites GPS

Considérons un satellite de masse  $m_1$  en orbite circulaire de rayon  $r_1$  autour de la Terre. La 2ème loi de Newton donne :

$$F = m_1 a_1 \quad \text{avec} \quad F = G \frac{M_{\oplus} m_1}{r_1^2} \tag{B.10}$$

où  $a_1$  est l’accélération du satellite,  $G$  est la constante de la gravitation universelle et  $M_{\oplus}$  est la masse de la Terre. Le mouvement étant circulaire uniforme, les coordonnées cartésiennes du satellite dans une repère géocentrique sont :

$$\begin{cases} x_1(t) = r_1 \cos(\omega_1 t + \theta_0) \\ y_1(t) = r_1 \sin(\omega_1 t + \theta_0) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \omega_1 = 2\pi/T_1$$



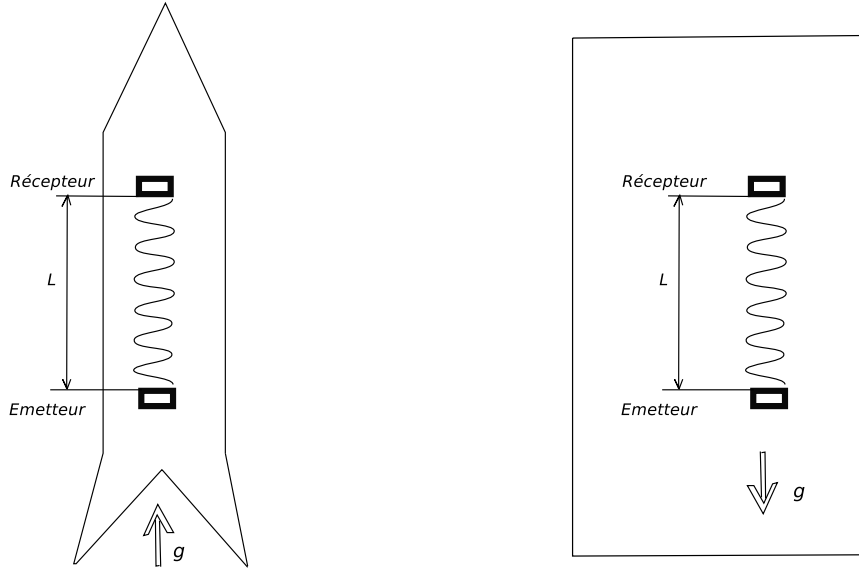


FIG. B.2: Dans une fusée soumise à une accélération constante  $g$ , la fréquence d'un signal émis dans la direction verticale dans le sens de l'accélération, sera décalée vers le rouge pour un récepteur embarqué dans la fusée (schéma de gauche). Le **principe d'équivalence** conduit donc à prédire un **décalage en fréquence d'origine gravitationnelle** de même amplitude pour un référentiel immobile soumis à un champ de gravité constant de module  $g$  (schéma de droite).

où  $T_1$  est la période de révolution du satellite. Les composantes de la vitesse et de l'accélération dans ce même repère sont donc :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -r_1\omega_1 \sin(\omega_1 t + \theta_0) \\ \dot{y}_1(t) = +r_1\omega_1 \cos(\omega_1 t + \theta_0) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \ddot{x}_1(t) = -r_1\omega_1^2 \cos(\omega_1 t + \theta_0) \\ \ddot{y}_1(t) = -r_1\omega_1^2 \sin(\omega_1 t + \theta_0) \end{cases}$$

Les valeurs des modules de la vitesse et de l'accélération :  $v_1(t) = |\dot{x}_1^2(t)|$  et  $a_1(t) = |\ddot{x}_1^2(t)|$  sont donc :

$$\begin{cases} v_1(t) = r_1\omega_1 \sqrt{\sin^2(\omega t + \theta_0) + \cos^2(\omega t + \theta_0)} = r_1\omega_1 \\ a_1(t) = r_1\omega_1^2 \sqrt{\cos^2(\omega t + \theta_0) + \sin^2(\omega t + \theta_0)} = r_1\omega_1^2 \end{cases}$$

Ces modules sont donc constants en fonction du temps et sont liés entre eux par la relation :

$$a_1 = v_1^2/r_1 \tag{B.11}$$

En substituant dans (B.10) il vient :

$$F = \frac{m_1 v_1^2}{r_1} = G \frac{M_\oplus m_1}{r_1^2}$$

D'où finalement :

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{r_1}} \quad \text{soit encore :} \quad v_1 = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{R_\oplus + h_1}} \tag{B.12}$$

où  $R_{\oplus} = 6378$  km est le rayon équatorial de la Terre,  $h_1$  l'altitude du satellite,  $G = 6.6738 \times 10^{-11}$  N.m<sup>2</sup>.kg<sup>-2</sup> et  $M_{\oplus} = 5.9736 \times 10^{24}$  kg.

Pour les satellites GPS/NAVSTAR, l'altitude moyenne est de  $h_1 \approx 20200$  km, correspondant à une distance géocentrique moyenne  $r_1 \approx 26378$  km. Ces valeurs conduisent à  $v_1 = 3.886$  km/s, et à une période orbitale  $T_1 = 2\pi r_1/v_1$  de 11h 51mn.

Par exemple, l'orbite du satellite NAVSTAR 32 (USA 91) a un demi-grand axe  $r_1 = 26560$  km, avec des altitudes au périégée et à l'apogée, valant respectivement 19963 km et 20416 km. L'application de (B.12) conduit à une vitesse moyenne de  $v_1 = 3.873$  km/s et la période orbitale correspondante vaut  $T_1 = 718$  mn, soit 11h 58mn.

### B.5.2 Retard des horloges embarquées dû au mouvement des satellites (relativité restreinte)

Nous avons vu en Sect. B.3.5 que le temps  $t_1$  mesuré par observateur d'un référentiel extérieur, s'écoule moins vite que le temps propre  $\tau$  du mobile en mouvement. Les tops d'horloge reçus par un récepteur situé au sol, en provenance de l'horloge embarquée dans le satellite (mobile), vont donc être plus espacés que ceux de l'horloge du centre GPS situé sur Terre (supposé immobile). D'après l'équation (B.9) :

$$\Delta t_1 = \Delta\tau/\gamma \quad \text{avec} \quad \gamma = \sqrt{1 - v_1^2/c^2}$$

La vitesse  $v_1$  étant très inférieure à  $c$ , on peut utiliser un développement limité :

$$\Delta t_1 \approx \Delta\tau \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{v_1}{c} \right)^2 \right] \quad (\text{B.13})$$

Le retard apparent accumulé sur une durée de un jour est donc de :

$$\delta t_1 \approx \frac{1}{2} \Delta\tau \left( \frac{v_1}{c} \right)^2 \quad (\text{B.14})$$

La vitesse moyenne des satellites GPS étant  $v_1 \approx 3.87$  km/s (voir Sect B.5.1), pour une durée de un jour ( $\Delta\tau = 24 * 3600 = 86400$  s) le retard sera donc de :

$$\Delta t_1 = 0.5 \times 86400 \times (3.87/3 \times 10^5)^2 = 7.2 \times 10^{-6}$$

Les horloges des satellites (mobiles) semblent donc retarder par rapport aux horloges terrestres (supposées immobiles) d'environ  $7 \mu$  s par jour.

### B.5.3 Avance des horloges embarquées due au champ de gravitation de la Terre (relativité générale)

La relativité générale prévoit que, du fait que le champ de gravitation terrestre est plus faible à l'altitude où se trouvent les satellites qu'au niveau du sol, les horloges des satellites vont cette fois prendre une avance (de  $45.7 \mu$  s par jour) par rapport à l'horloge des stations GPS sur Terre.

## B.5. EFFETS RELATIVISTES POUR LE GPS

La variation relative de fréquence  $f_1 - f_0/f_0$  entre deux horloges  $h_0$  et  $h_1$  situées dans un champ gravitationnel dont le potentiel a les valeurs respectives de  $\Phi_1 = \Phi_0 + \Delta\Phi$  et  $\Phi_0$  est :

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta\Phi}{c^2} \quad (\text{B.15})$$

où  $\Delta f = f_1 - f_0$ .

Considérons deux horloges, une horloge  $h_0$  de référence au sol, au niveau de l'équateur terrestre, à un rayon  $a_0$  ; et une horloge  $h_1$  embarquée sur un satellite, à une distance  $r_1$  du centre de la Terre.

Le potentiel gravitationnel de l'horloge  $h_1$  en orbite est, avec une très bonne approximation :

$$\Phi_1 = -\frac{GM}{r_1} \quad (\text{B.16})$$

où, pour la Terre  $GM = 2.986004415 \times 10^{14} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$  (Ashby, 2006). Par contre le potentiel gravitationnel de l'horloge  $h_0$ , située au sol, est légèrement affecté par le fait que la Terre n'est pas parfaitement sphérique, et on doit faire intervenir le moment quadrupolaire :

$$\Phi(\vec{r}) \approx -\frac{GM}{r} \left[ 1 - \frac{a_0 J_2 P_2(\cos \theta)}{r^2} \right] \quad (\text{B.17})$$

où  $\theta$  est la latitude du point sur Terre repéré par le vecteur  $\vec{r}$ ,  $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$  est le deuxième polynôme de Legendre et  $J_2 = 1.08263 \times 10^{-3}$  est le coefficient du moment quadrupolaire de la Terre (Ashby, 2006). On a donc :

$$\Phi(\vec{r}) = -\frac{GM}{r} \left[ 1 - J_2 \frac{a_0^2 (3 \cos^2(\theta) - 1)}{2r^2} \right] \quad (\text{B.18})$$

Pour une horloge  $h_0$  située sur l'équateur, on a  $r = a_0$  et  $\theta = 0$ . Son potentiel gravitationnel est donc :

$$\Phi_0 = -\frac{GM}{a_0} \left( 1 + \frac{J_2}{2} \right) \quad (\text{B.19})$$

Le décalage relatif de fréquence entre  $h_1$  et  $h_0$ , est donc, d'après les équations (Eqs. B.15), (B.16) et (B.19) :

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Phi_1 - \Phi_0}{c^2} = -\frac{GM}{r_1 c^2} + \frac{GM}{a_0 c^2} \left( 1 + \frac{J_2}{2} \right) \approx 5.288 \times 10^{-10} \quad (\text{B.20})$$

Il y a donc un accroissement de la fréquence, ce qui correspond à une décroissance dans l'espace des durées : l'horloge embarquée semble battre plus rapidement les secondes. Elle est en avance par rapport à l'horloge située au sol. C'est un effet très important, de  $45.7 \mu\text{s}$  par jour, qui conduirait à une erreur de 13.7 km pour le positionnement.

En ajoutant le retard de  $-7 \mu\text{s}$  dû au mouvement du satellite, calculé dans la section précédente l'écart global dû aux effets relativistes est de  $\delta t = 45.7 - 7 = 38.7 \mu\text{s}$  par jour entre l'heure indiquée par l'horloge des satellites et celle du centre GPS.

Cet écart correspondrait à une erreur potentielle de  $\delta d = c \times \delta t = 3 \times 10^8 \times 38.7 \times 10^{-6} = 11 \text{ km}$

Le système GPS doit donc intégrer les corrections relativistes d'Einstein dans le calcul de positions précises. De façon concrète :

*ANNEXE B. INTRODUCTION À LA RELATIVITÉ ET CORRECTIONS  
RELATIVISTES POUR LE GPS*

---

- les corrections relativistes d'origine gravitationnelle sont effectuées en amont. Les horloges atomiques embarquées sont ralenties avant le lancement des satellites, de façon à ce que, en orbite, elles aient la même fréquence que les horloges atomiques des stations GPS installées au sol.
- les autres corrections relativistes, liées au mouvement des satellites, sont prises en compte dans les calculs effectuées par les micro-calculateurs des récepteurs GPS.

# Bibliographie

## *Relativistic effects in the Global positioning System*

Ashby, N., 2006, AAPT, <http://www.aapt.org/doorway/tgru/articles/ashbyarticle.pdf>

## *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*

Einstein A., 1905, Annalen der Physik, 17, 891–921

## *Résolution d'ambiguïtés entières sur graphes interférométriques et GPS*

Lannes, A., 2001, CR Acad Sci I-Math 333, 707–712

## *QR implementation of GNSS centralized approaches*

Lannes, A., Gratton S., 2008, J GPS 7, 133–147

## *GNSS networks in algebraic graph theory*

Lannes, A., Gratton S., 2009, J GPS 8, 53–75

## *GNSS algebraic structures*

Lannes, A., Teunissen, P.J.G., 2011, J Geod 85, 273–290

## *Algebraic analysis of the phase-calibration problem in the self-calibration procedures*

Lannes, A., Prieur, J.-L., 2011, AN, 332, 759–784

## *On the theoretical link between LLL-reduction and LAMBDA-decorrelation*

Lannes, A., 2013, J Geod 87, 323

## *Calibration of the clock-phase biases of GNSS networks : the closure-ambiguity approach*

Lannes, A., Prieur, J.-L., 2013, J Geod 87, 709

## *Integer-ambiguity resolution in astronomy and geodesy*

Lannes, A., Prieur, J.-L., 2014, Astron. Nach., 335, 198–209 [[lien vers HAL](#)]

## *Factorizing polynomials with rational coefficients*

Lenstra, A.K., Lenstra, H.W., Lovász, L., 1982, Math Ann 261, 515–534.

## *Zero-difference GPS ambiguity resolution at CNES-CLS IGS Analysis Center*

Loyer, S., Perosanz, F., Mercier, F., Capdeville, H., Marty, J.-C., 2012, J Geod 86, 991-1003

## *A parallel LLL algorithm*

Luo, L., Qiao, S., 2011, Proceedings of the Fourth International C\* Conference on Computer Science and Software Engineering. ACM Int Conf P Series, ACM Press, 93-101

*GPS for Geodesy*

Teunissen, P.J.G., Kleusberg, A., 1998 2nd edn, Springer Verlag.

*The GNSS integer ambiguities : estimation and validation*

Verhagen, S., 2005, Ph.D. thesis, Univ. Deft, The Netherlands.

# Index

- Beidou/Compass, 1
- Cholesky, 16
- code
  - C/A (Clear/Access or Coarse Acquisition), 5
  - I5, 5
  - L2C, 5
  - P/Y (Precise or Protected), 5
  - Q5, 5
- Galilée
  - référentiel galiléen, 21
  - relativité galiléenne, 20
  - transformations de Galilée, 21
- Galileo, 1
- GDOP (Geometric Dilution of Precision), 7
- GLONASS, 1
- GNSS (Global Navigation Satellite System), 1
- GPS (Global Positioning System), 1
- HDOP (Horizontal Dilution of Precision), 7
- inertie
  - centre, 19
  - principe, 19
  - référentiel inertiel, 20
- IRNSS (Indian Regional Navigational Satellite System), 1
- LAMBDA, 12
- LLL, 12, 15
- Lorentz, 21
- NAVSTAR (NAVigation Satellite Timing And Ranging), 1
- Newton, 19
- NLP (Near Lattice Point), 12
- NLP (Near-Lattice Point), 16
- PCV (Phase Center Variations), 10
- PLL (Phase Locked Loop), 10, 11
- pseudo-distance, 1, 5, 8
- pseudo-range, 8
- QR, 12
- quantité de mouvement, 19
- relativité
  - générale, 21
  - galiléenne, 20
  - restreinte, 21
- RTK (Real Time Kinematic), 8
- TRANSIT, 1
- VDOP (Vertical Dilution of Precision), 7
- WGS-84 (World Geodesic System – 1984), 1





# Glossaire

**Beidou/Compass** : système de navigation par satellite développé par la Chine, associé au projet européen **Galileo** (*běidǒu* désigne le “chariot” de la Grande Ourse). **2**

**code (or pseudo-range)** : mesure de code ou de “pseudo-distance”: mesure du décalage temporel entre les signaux de code émis et reçus. On en déduit une mesure grossière de la distance récepteur-émetteur du satellite (voir Sect. **I.3.1**). **8**

**code C/A** : code C/A (Clear/Access or Coarse Acquisition): codage pseudo-aléatoire de la porteuse L1 (GPS/NAVSTAR). **5**

**code P** : code P (Precise or Protected): codage des porteuses L1 et L2 réservé aux militaires (GPS/NAVSTAR). **5**

**code Y** : codage des porteuses L1 et L2 réservé aux militaires (GPS/NAVSTAR). Le code P dont la séquence était connue, et qui était utilisé au départ, a été complété en 1994 par un code secret W, pour des raisons de sécurité. Plus précisément, le code résultant est  $Y = P + W$ . C’est une combinaison anti-brouillage (A-S: Anti-Spoofing), qui permet d’éviter un brouillage du code Y en cas de conflit. **5**

**Galileo** : Galileo: (futur) système civil de navigation par satellite européen. Un accord d’interopérabilité a été conclu avec le système **GPS**. Ces deux systèmes devraient être compatibles entre eux, et Galileo devrait utiliser les mêmes fréquences que le GPS. **2, 35**

**GLONASS** : (GLOBALnaïa NAVigatsionnaïa Spoutnikovaïa Sistéma) système de navigation par satellite développé par la Russie, équipés de 24 satellites Ouragan, en configuration nominale. **1**

**GNSS** : (Global Navigation Satellite System) système mondial de navigation par satellite. **2**

**GPS** : (Global Positioning System): système de navigation par satellite des Etats-Unis, appelé aussi NAVSTAR. La constellation GPS est constituée d’une trentaine de satellites. **1, 35, 36**

**IRNSS** : (Indian Regional Navigational Satellite System): système de navigation par satellite développé par l’Inde. **2**

**LAMBDA** : Méthode LAMBDA (Least-squares AMBiguity Decorrelation Adjustment): méthode de résolution d’ambiguïtés entières en GNSS mise au point par P. Teunissen. **12**

**ligne d’univers** : trajectoire dans un espace-temps à 4 dimensions. La ligne d’univers d’un objet est le chemin séquentiel d’événements qui caractérise l’histoire de cet objet dans un référentiel donné. **24**

- 
- LLL** : Réduction LLL (Lenstra, Lenstra et Lovász, 1982) : recherche pour un réseau entier d'une base ayant un faible défaut d'orthogonalité pour un produit scalaire donné (Lenstra, Lenstra & Lovász, 1982). 12
- NAVSTAR** : (NAVigation Satellite Timing And Ranging) système de navigation par satellite des Etats-Unis, appelé aussi **GPS**. 1
- NLP** : NLP (Nearest Lattice Point): point le plus proche d'un vecteur à valeurs réelles dans un réseau entier. 12
- mesure de phase** : (carrier-phase measurement) mesure de la distance récepteur-émetteur, exprimée en nombres de cycles de la fréquence porteuse. Cette mesure peut être très précise, lorsqu'on réussit à lever son ambiguïté (voir Sect. I.3.2). 8, 9
- principe d'équivalence** : Le principe d'équivalence faible dit que la masse inertielle et la masse gravifique sont égales quel que soit le corps considéré. Le principe d'équivalence d'Einstein affirme en plus que les effets d'un champ gravitationnel sur une expérience de mécanique et d'électromagnétisme n'utilisant pas la gravitation sont identiques aux effets d'une accélération du référentiel de l'observateur. 25
- référentiel inertielle** : référentiel dans lequel le centre d'inertie d'un objet isolé (sur lequel ne s'exerce aucune force) ou pseudo-isolé (sur lequel la résultante des forces est nulle) est en mouvement de translation rectiligne uniforme (vitesse constante en direction et en norme). 24, 36
- RTK** : (Real Time Kinematic) cinématique temps réel. Technique de positionnement précis par satellite de cibles en mouvement. 8
- temps propre** : le temps propre  $\tau$  d'une particule est le temps mesuré dans le repère de cette particule (i.e., repère où cette particule est immobile). En relativité restreinte, l'intervalle de temps propre  $\Delta\tau$  séparant deux événements est l'intervalle de temps  $\Delta t$  dans un **référentiel inertielle** où ils ont lieu au même endroit de l'espace. 24