

Théories de champ moyen et convection à grande échelle

5.1 Introduction

Au cours de ce travail, nous avons à plusieurs reprises été confrontés au problème de la compréhension et de la modélisation de l'influence de mouvements turbulents à petite échelle sur des mouvements à grande échelle : aux chapitres 1 et 3, nous avons estimé grossièrement la viscosité turbulente associée à la granulation en utilisant principalement un argument dimensionnel. Au chapitre 4, nous avons ensuite calculé explicitement les effets du transfert non-linéaire sur les mésoéchelles et nous avons vu qu'ils se ramenaient qualitativement à une augmentation de la viscosité vue par celles-ci. Les mouvements aux très grandes échelles de la simulation étaient quant à eux faiblement alimentés par le terme de transfert, ce qui rendait délicate l'interprétation de cet effet.

Afin de résoudre ce problème de modélisation des petites échelles dans les écoulements astrophysiques, diverses théories de champ moyen ont été élaborées. Celles-ci permettent en principe de calculer la dynamique aux grandes échelles lorsque l'écoulement à petite échelle est connu, sans avoir pour autant à réaliser une simulation qui résoudrait simultanément ces deux gammes d'échelles. Dans l'hypothèse où il existe une *séparation d'échelle*, les équations à grande échelle sont obtenues en moyennant les équations complètes du mouvement sur une petite échelle caractéristique de la turbulence, ce qui a pour effet de faire apparaître des termes moyens quadratiques par rapport aux quantités à petite échelle. Comme nous allons le voir, l'expression formelle de ces termes est simple. En revanche, le calcul pratique des coefficients apparaissant dans l'équation moyenne peut s'avérer fort complexe.

Constatant qu'une séparation d'échelles était probablement réalisée entre la

supergranulation et la granulation solaires, nous nous sommes demandé s'il serait possible d'appliquer ces théories de champ moyen afin d'obtenir des informations sur le transport turbulent dans la photosphère solaire et l'origine de la supergranulation. Celle-ci pourrait-elle en particulier être générée par un mécanisme d'instabilité à grande échelle ?

Remarque

Quelques exemples de théories de champ moyen

- l'effet AKA et la viscosité turbulente. Ces deux effets concernent la génération et le transport de quantité de mouvement. Le premier est favorisé dans des écoulements possédant de l'hélicité (Frisch et al. 1987, Sulem et al. 1989). La seconde permet en théorie de calculer la viscosité effective liée au transport de quantité de mouvement par la turbulence à petite échelle (Krause et Rüdiger 1974, Dubrulle et Frisch 1991) ;
- l'effet Λ . Il est formellement identique à l'effet AKA et est invoqué pour le transport de moment cinétique dans les étoiles et les disques d'accrétion (Rüdiger 1989, Kitchatinov et al. 1994) ;
- la génération et le transport du champ magnétique : effets α et β . (Parker 1955, Moffatt 1978). L'effet α est l'analogue de l'effet AKA pour le processus de dynamo. Il est lui-aussi favorisé par des écoulements hélicitaires. L'effet β correspond pour sa part à la diffusion magnétique turbulente.

À cette liste, il convient de rajouter la théorie de la longueur de mélange pour le transport d'énergie par convection. Il s'agit d'une théorie totalement indépendante des précédentes d'un point de vue formel, mais qui est très utilisée dans le domaine de la structure et de l'évolution stellaires pour modéliser la contribution moyenne de la convection au transport de l'énergie.

Dans ce chapitre, nous exposons pour commencer le formalisme développé par Dubrulle et Frisch (1991) pour le calcul de viscosités turbulentes dans des écoulements simples et mettons en relation ce travail avec les problèmes des instabilités de phase observées et calculées dans le domaine de la convection d'amplitude finie. Nous présentons ensuite le travail réalisé en cours de thèse. Il s'agit principalement du développement d'un code permettant à l'heure actuelle de calculer des coefficients de viscosité turbulente suivant la méthode de Dubrulle et Frisch (1991).

La résolution du problème complet prendra de toute évidence beaucoup de temps et la contribution de ce travail est malheureusement restée très modeste. La principale difficulté rencontrée a été de parvenir à extrapoler des résultats

établis principalement pour des écoulements théoriques simples à faible nombre de Reynolds à des écoulements de convection plus proches du contexte solaire.

5.2 Effet AKA et viscosité turbulente

5.2.a Phénoménologie

Intéressons nous pour commencer aux principes généraux de dérivation des théories de champ moyen en hydrodynamique. Considérons un champ de vitesse v solution des équations complètes du mouvement. Nous supposons que v ne contient que des composantes à des échelles r inférieures à une échelle maximale ℓ . Dans la suite, le symbole $\langle \rangle$ désignera une moyenne sur l'échelle ℓ , de telle sorte que $\langle v \rangle = 0$. Soit une perturbation de vitesse V infinitésimale à une échelle caractéristique $L \gg \ell$, si bien que $\langle V \rangle \neq 0$. Le paramètre $\varepsilon = \ell/L \ll 1$ peut être utilisé pour faire un développement asymptotique afin d'obtenir l'équation d'évolution pour $\langle V \rangle$. Les champs moyens dépendent des variables dites lentes

$$\begin{aligned} X &= \varepsilon x, \\ T &= \varepsilon^n t, \end{aligned} \tag{5.1}$$

où n peut valoir 1 ou 2 selon le type d'écoulement étudié (n sera précisé un peu plus loin). Les dérivées sont alors décomposées suivant

$$\begin{aligned} \partial_i &\rightarrow \partial_i + \varepsilon \nabla_i, \\ \partial_t &\rightarrow \partial_t + \varepsilon^n \partial_T. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Notons que les opérateurs lents ∇_i et ∂_T appliqués à des champs à petite échelle donnent zéro. Lorsque l'écoulement v est perturbé par le champ de vitesse V à grande échelle, le tenseur de Reynolds R_{ij} associé à l'écoulement à petite échelle

$$R_{ij} = \langle v_i v_j \rangle \tag{5.3}$$

est modifié d'une quantité

$$\delta R_{ij} = -\alpha_{ijk} V_k - \varepsilon N_{ijklm} \nabla_l V_m + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \tag{5.4}$$

qui participe à la dynamique à grande échelle. Formellement,

$$\alpha_{ijk} = \left. \frac{\partial \langle v_i v_j \rangle}{\partial V_k} \right|_{V_k=0}. \tag{5.5}$$

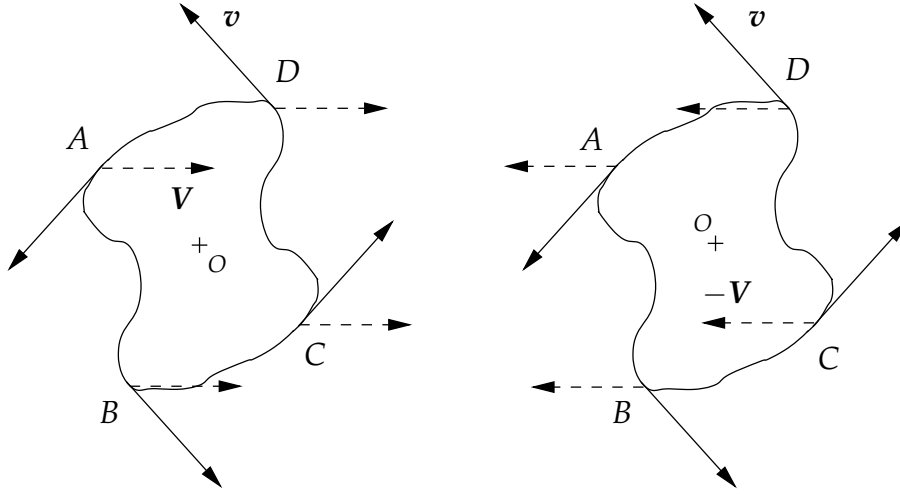


FIG. 5.1 – Disparition de l’effet AKA dans un écoulement bidimensionnel invariant par parité (on a représenté une ligne de courant). Le champ de vitesse v à petite échelle est tracé en trait plein et le champ de vitesse moyen V en tirets. La situation physique pour un champ de vitesse moyen V (figure de gauche) est rigoureusement identique du point de vue des moyennes à celle obtenue pour $-V$ (à droite), en raison de l’invariance par parité de l’écoulement à petite échelle par rapport au point O . Par exemple, la configuration des champs de vitesse au point A pour V est identique à celle au point C pour $-V$ et réciproquement. Les éléments du tenseur de Reynolds $\langle v_i v_j \rangle$, obtenus en sommant sur tous les points de l’écoulement à petite échelle, prennent donc les mêmes valeurs pour V et $-V$. La relation (5.5) montre alors que les coefficients α_{ijk} s’annulent dans ce cas puisqu’ils sont définis comme des dérivées à l’origine de fonctions paires.

Le terme (5.5) est à l’origine de l’effet AKA. Il intervient dans l’équation de la quantité de mouvement à grande échelle à l’ordre ε ($n = 1$ dans la définition de la variable lente en temps dans ce cas) et peut donner lieu à une instabilité à grande échelle pour des écoulements tridimensionnels (Frisch et al. 1987). Ce terme est nul notamment lorsque l’écoulement est invariant par parité, le tenseur de Reynolds étant dans ce cas une fonction paire de la perturbation à grande échelle (voir figure 5.1 et sa légende). Dans la suite, nous nous concentrerons uniquement sur des cas où ce terme est nul. L’équation d’évolution pour les perturbations à grande échelle est alors obtenue en allant à l’ordre ε^2 ($n = 2$ pour la variable de temps dans ce cas). Comme le champ de vitesse à grande échelle est supposé avoir initialement une amplitude faible, cette équation est linéaire en V . Il vient

$$\frac{\partial V_i}{\partial T} = -\nabla_i P + N_{ijlm} \nabla_j \nabla_l V_m + v \nabla_j \nabla_j V_i, \quad (5.6)$$

P étant la perturbation de pression associée à V . Le coefficient N_{ijlm} caractérise le transport turbulent associé à v . Considérons pour simplifier le cas d’un

écoulement de base isotrope, pour lequel $N_{ijlm} = N_T \delta_{im} \delta_{jl}$. On peut chercher une relation de dispersion pour cette équation en utilisant une dépendance en $\exp [i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \lambda T]$ pour V . Il vient

$$\lambda = -(\nu + N_T) K^2 \quad (5.7)$$

La valeur de N_T dépend de ν et peut *a priori* être négative, positive, ou même complexe. Si $N_T < -\nu$, l'équation (5.7) montre que λ est positif et que l'écoulement à petite échelle devient instable vis-à-vis de perturbations à grande échelle (deux exemples d'instabilité de viscosité turbulente négative en deux dimensions seront donnés plus loin). La question intéressante dans le contexte de ce travail est donc de déterminer les propriétés de transport à grande échelle d'un écoulement de convection ressemblant à la granulation, qui pourrait donner lieu à une instabilité de ce type.

5.2.b Expression des coefficients

Le point délicat dans la théorie exposée ci-dessus se situe au niveau du calcul des coefficients α_{ijk} et N_{ijlm} , qui dépendent de l'écoulement à petite échelle considéré. Krause et Rüdiger (1974) ont proposé une méthode de résolution basée sur une hypothèse de fermeture analogue à la *First Order Smoothing Approximation* utilisée en électrodynamique de champ moyen (Moffatt 1978), qui est malheureusement inadaptée à la granulation solaire car elle requiert que le nombre de Reynolds de l'écoulement à petite échelle soit très petit. Notons cependant que leurs calculs aboutissent pour la granulation solaire à l'expression

$$\nu_T = N_T + \nu \simeq N_T = \frac{L_g V_g}{3}, \quad (5.8)$$

qui est similaire à celle que nous avons utilisée aux chapitres 1 et 3.

Dubrulle et Frisch (1991) ont pour leur part proposé un formalisme pour des écoulements incompressibles périodiques dans toutes les directions, qui permet d'obtenir sans fermeture l'expression théorique rigoureuse de ces coefficients, lorsqu'un développement multi-échelles est possible. Nous reproduisons ici les grandes lignes de leur théorie, sur laquelle nous nous sommes appuyés pour commencer ce projet.

Si \mathbf{v} est une solution stationnaire des équations de Navier-Stokes incompressibles, alors une perturbation \mathbf{V} à grande échelle obéit à l'équation linéarisée

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + \partial_j (v_i V_j + v_j V_i) = -\partial_i P + \nu \Delta V_i \quad (5.9)$$

et satisfait la condition d'incompressibilité

$$\partial_i V_i = 0. \quad (5.10)$$

Dans ces deux expressions, les opérateurs de différentiation contiennent à la fois les parties lentes et rapides. Pour le quadrivecteur (P, \mathbf{V}) , on peut écrire formellement¹

$$\mathcal{L}_{\text{NS}} \begin{bmatrix} P \\ \mathbf{V} \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (5.11)$$

L'opérateur de Navier-Stokes linéarisé \mathcal{L}_{NS} est développé en puissances de ε en utilisant l'équation (5.2) :

$$\mathcal{L}_{\text{NS}} = \mathcal{A} + \varepsilon \mathcal{B} + \varepsilon^2 \mathcal{C} + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (5.12)$$

Remarquons que l'opérateur \mathcal{A} contient uniquement des dérivées sur les variables rapides (x, t) et que l'opérateur \mathcal{B} contient systématiquement des dérivées lentes et peut être réécrit sous la forme

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}^i \nabla_i. \quad (5.13)$$

Le quadrivecteur (P, \mathbf{V}) est pour sa part décomposé en

$$\begin{bmatrix} P \\ \mathbf{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}_0 + \varepsilon \begin{bmatrix} P \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}_1 + \varepsilon^2 \begin{bmatrix} P \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}_2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (5.14)$$

En utilisant les équations (5.9)-(5.12)-(5.14), on obtient alors une équation pour chaque ordre en ε :

$$\mathcal{O}(1) \quad \mathcal{A} \begin{bmatrix} P \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}_0 = \mathbf{0}, \quad (5.15)$$

$$\mathcal{O}(\varepsilon) \quad \mathcal{A} \begin{bmatrix} P \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}_1 = -\mathcal{B} \begin{bmatrix} P \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}_0, \quad (5.16)$$

$$\mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad \mathcal{A} \begin{bmatrix} P \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}_2 = -\mathcal{B} \begin{bmatrix} P \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}_1 - \mathcal{C} \begin{bmatrix} P \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}_0. \quad (5.17)$$

Ces équations sont toutes de la forme $\mathcal{A}\Psi = \Phi$. Pour chacune d'entre elles une condition d'existence des solutions doit être remplie (alternative de Fredholm). Φ doit être orthogonale à l'ensemble des solutions Ψ^\dagger du problème adjoint homogène

$$\mathcal{A}^\dagger \Psi^\dagger = \mathbf{0}, \quad (5.18)$$

pour un produit scalaire noté $\langle \Psi^\dagger, \Phi \rangle$. Dans le cas où l'écoulement est périodique dans toutes les directions, le noyau de \mathcal{A}^\dagger est constitué par l'ensemble des fonctions constantes, car chaque bloc non nul de l'opérateur \mathcal{A}^\dagger contient des dérivées rapides à droite. La condition précédente se résume alors à $\langle \Phi \rangle = \mathbf{0}$. L'équation (5.15) est satisfaite naturellement. En ce qui concerne les équations (5.16)-(5.17), la procédure aboutit respectivement aux équations pour la dynamique à

¹Les expressions détaillées des opérateurs sont données dans l'article de Dubrulle et Frisch (1991).

grande échelle aux ordres ε (équation AKA) et ε^2 (viscosité turbulente) et permet d'obtenir l'expression des coefficients α_{ijk} et N_{ijlm} . Dans l'article de Dubrulle et Frisch (1991), il est démontré que toute fonction Ψ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\Psi = \tilde{\mathcal{A}}^{-1} \Phi + \left(\text{Id} - \tilde{\mathcal{A}}^{-1} \mathcal{A} \right) \langle \Psi \rangle, \quad (5.19)$$

où $\tilde{\mathcal{A}}$ correspond à la restriction de \mathcal{A} aux fonctions de moyenne nulle, qui est supposée inversible, et $(\text{Id} - \tilde{\mathcal{A}}^{-1} \mathcal{A}) \langle \Psi \rangle$ est une représentation du noyau. Les expressions des coefficients sont obtenues en utilisant cette dernière équation dans laquelle Φ est remplacé par le membre de droite des équations (5.15)-(5.16)-(5.17). Il vient

$$\alpha_{ijk} = - \left\langle \mathcal{B}_{V_i V_n}^j \left(\text{Id} - \tilde{\mathcal{A}}^{-1} \mathcal{A} \right)_{V_n V_k} \right\rangle, \quad (5.20)$$

et

$$v_{ijlm} = \nu \delta_{im} \delta_{jl} + N_{ijlm} = \nu \delta_{im} \delta_{jl} + \left\langle \left[\mathcal{B}^j \tilde{\mathcal{A}}^{-1} \mathcal{B}^l \left(\text{Id} - \tilde{\mathcal{A}}^{-1} \mathcal{A} \right) \right]_{V_i V_m} \right\rangle. \quad (5.21)$$

Les composantes de \mathcal{A} étant connues, la détermination des coefficients se ramène alors à une série de résolutions de systèmes linéaires et de multiplications qui peuvent être réalisées numériquement.

5.2.c Écoulements non périodiques et instabilités de phase

La situation se complique malheureusement dramatiquement dès lors que l'hypothèse de périodicité est abandonnée (par exemple dans la direction de la gravité pour la convection entre deux plaques), parce qu'il devient nécessaire de calculer les solutions du problème adjoint homogène afin de résoudre le problème de l'alternative de Fredholm. L'existence de solutions du noyau non triviales est liée à l'existence de symétries dans le système (par exemple une invariance par translation ou une invariance galiléenne dans le cas de parois stress-free²). Cross et Newell (1984) et Newell et al. (1990) (dans un article de 65 pages !) se sont attaqués à ce problème pour la convection d'amplitude finie dans des domaines à grand rapport d'aspect. Leur analyse est basée sur un développement asymptotique légèrement différent de celui de Dubrulle et Frisch (1991), puisque l'inverse du rapport d'aspect ε sert à la fois à mesurer l'amplitude des perturbations et à faire le développement multi-échelles, alors que deux paramètres (η et ε) sont utilisés dans le travail de Dubrulle et Frisch (1991). Newell et al. (1990) ont également proposé l'utilisation de la technique numérique de décomposition en valeurs singulières pour parvenir à résoudre le système linéaire singulier représenté par la matrice \mathcal{A} (problème équivalent à l'inversion de $\tilde{\mathcal{A}}$ de Dubrulle et Frisch (1991)). Cet algorithme permet en effet de calculer directement les solutions du problème $\mathcal{A}\Psi = \Phi_{\perp}$, où Φ_{\perp} est la projection du membre de droite initial Φ perpendiculairement au noyau de \mathcal{A}^{\dagger} .

²Dans le formalisme de Dubrulle et Frisch (1991), le problème de l'invariance galiléenne ne se pose pas car l'écoulement de base est forcé.

Il est particulièrement intéressant de noter que les instabilités à grande échelle des rouleaux de convection d'amplitude finie, étudiées notamment par Pomeau et Manneville (1979), Couillet et Fauve (1985), Newell et al. (1990), sont tout à fait similaires aux instabilités de type viscosité turbulente négative. Ces instabilités de convection peuvent être mises en évidence en dérivant une équation de diffusion pour la phase Θ d'une perturbation à grande échelle de la forme $V = V_0 \exp [i \Theta(X, T)]$, superposée à des rouleaux de convection d'amplitude finie. Cette équation s'écrit

$$\frac{\partial \Theta}{\partial T} = D_{\parallel} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + D_{\perp} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2}, \quad (5.22)$$

où X est la coordonnée parallèle au vecteur d'onde des rouleaux de convection et Y est la coordonnée perpendiculaire à celui-ci (suivant l'axe des rouleaux). En utilisant l'équation (5.22), on peut voir qu'une instabilité transverse se développe (figure 5.2) lorsque le coefficient de diffusion perpendiculaire D_{\perp} devient négatif (instabilité zigzag), tandis qu'une instabilité longitudinale, appelée instabilité d'Eckhaus, se produit lorsque c'est D_{\parallel} devient négatif (figure 5.3). Il existe également une instabilité, dite variqueuse, avec une polarisation intermédiaire (Cross et Hohenberg 1993).

Il existe donc une part de théorie importante réalisée pour étudier la stabilité des écoulements de convection, qu'il faudra suivre pour généraliser le formalisme du transport turbulent proposé par Dubrulle et Frisch (1991).

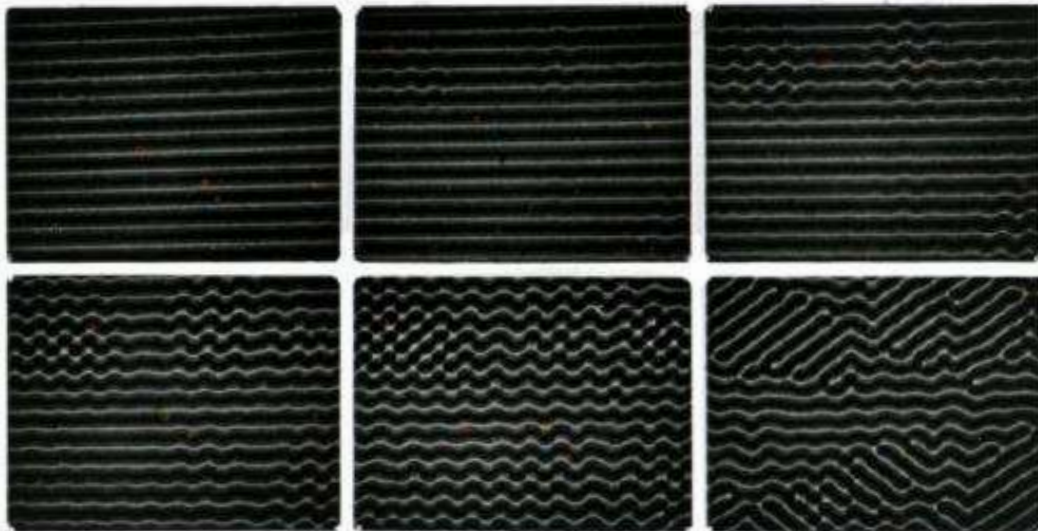


FIG. 5.2 – De gauche à droite et de haut en bas : développement d'une instabilité transverse zigzag de rouleaux de convection (origine bibliographique inconnue).

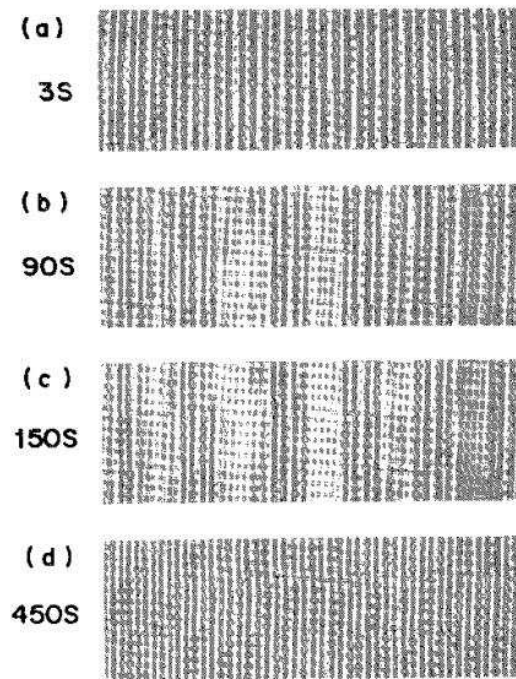


FIG. 5.3 – De haut en bas : développement de l’instabilité longitudinale d’Eckhaus pour de la convection électrohydrodynamique en rouleaux dans un cristal liquide (Lowe et Gollub 1985). Une modulation à grande échelle dans la direction périodique est observée.

5.3 Méthode numérique de résolution

5.3.a Principe général du code

Afin d’appliquer la théorie de Dubrulle et Frisch (1991), un programme permettant de résoudre les équations (5.20) et (5.21) a été développé. Celui-ci est écrit en fortran 90. Il résout des équations linéaires aux dérivées partielles en trois dimensions, du type

$$\mathcal{L}_v \Psi = b_v \quad (5.23)$$

où Ψ est un champ de vecteurs inconnu, \mathcal{L}_v est un opérateur différentiel connu qui dépend d’un champ de vecteurs v prescrit. Le vecteur membre de droite b_v est lui aussi connu et peut également dépendre de v . Nous avons opté pour une configuration géométrique similaire à celle employée dans les simulations numériques directes présentées au chapitre 4, c’est-à-dire une géométrie cartésienne avec une direction anisotrope.

Remarque | Dans ce chapitre x représente la direction verticale, et y et z les directions horizontales.

Une décomposition spectrale des champs a été adoptée dans les directions horizontales. Dans la direction verticale, nous avons choisi d'utiliser des polynômes de Chebyshev pour leurs propriétés de convergence spectrale et leur capacité à résoudre plus facilement des couches limites à proximité des parois.

5.3.b Disposition des données

La première étape consiste à parvenir à construire la représentation matricielle de divers opérateurs linéaires \mathcal{L} (comme \mathcal{A} et \mathcal{B}) pour des écoulements stationnaires, sur la grille définie précédemment. Ces matrices dépendent des champs de vitesse à petite échelle et contiennent principalement des opérateurs d'advection de type $v \cdot \partial$, des termes de dérivation et des termes de multiplication simple, qu'il faut exprimer pour la méthode de projection utilisée. Les termes d'advection, comme nous allons le voir, sont particulièrement délicats à construire dans les directions spectrales. En pratique, la construction des problèmes est effectuée par l'intermédiaire d'une interface PERL.

Le vecteur Ψ de l'équation (5.23) possède N_c composantes (par exemple, pression, vitesse, température) qui s'écrivent

$$\Psi_m(x_i, K_{y_j}, K_{z_k}), \quad m = 1, \dots, N_c \quad (5.24)$$

sur la grille choisie. Dans cette expression, x_i correspond au point de collocation de Chebyshev i ($i = 1, \dots, N_x$), et K_{y_j} et K_{z_k} sont deux vecteurs d'onde dans les directions horizontales. La disposition des données pour les transformées de Fourier est telle que $j = 1, \dots, 2(N_y/2 + 1)$ et $k = 1, \dots, N_z$. Dans la direction y , les éléments d'indice impair correspondent aux parties réelles des composantes de Fourier et les éléments d'indice pair aux parties imaginaires pour le même vecteur d'onde. Les vecteurs d'onde K_{y_1} et K_{z_1} désignent les composantes continues dans les directions y et z . Les $N_z/2 + 1$ premiers éléments dans la direction z correspondent aux vecteurs d'onde allant de 0 à $N_z/2$, et les $N_z/2 - 1$ suivants aux vecteurs d'onde $-N_z/2 + 1$ à -1 .

Finalement, Ψ doit être stocké sous une forme unidimensionnelle pour la résolution numérique. La disposition suivante a été adoptée :

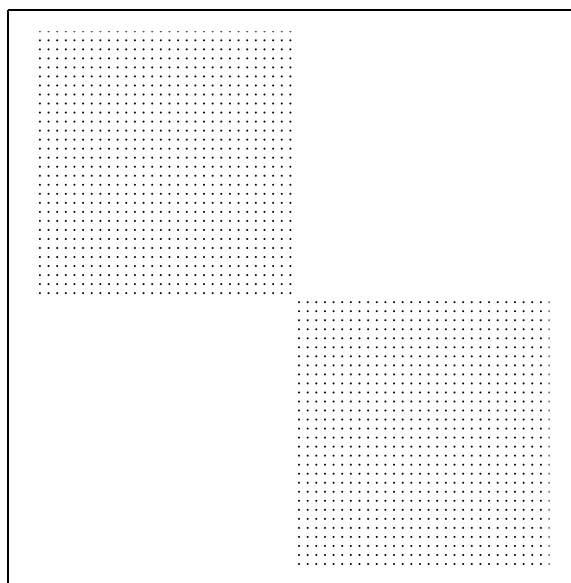


FIG. 5.4 – Représentation matricielle de l’opérateur ∂_x en Chebyshev pour $N_x = 30$ et $N_y = 1$ (il y a deux blocs correspondant aux parties réelle et imaginaire).

5.3.c Blocs matriciels

L’étape suivante concerne la disposition des opérateurs. Une dérivation dans la direction verticale consiste en des blocs $N_x \times N_x$ diagonaux par rapport aux K_y et aux K_z (figure 5.4). Une dérivation dans la direction y ou z fait apparaître deux bandes sur et sous diagonales. Ceci est dû à l’alternance des composantes réelle et imaginaire qui sont transformées l’une dans l’autre par l’opérateur de dérivation d’ordre 1 (figure 5.5). Pour l’opérateur de dérivée seconde, la matrice est diagonale.

L’agencement des matrices est plus subtil pour les termes d’advection ou de multiplication par une fonction des variables d’espace. Dans la direction verticale, on aura simplement des éléments diagonaux contenant la valeur du champ d’advection en chaque point (absence de corrélations entre deux point x et x'). En revanche, le fait de représenter les fonctions spectralement horizontalement fait apparaître des produits de convolution pour les termes d’advection (figure 5.6) liés à la multiplication de fonctions dans l’espace réel. Il existera donc en général des couplages entre tous les K_y , d’une part, et tous les K_z , d’autre part, pour un x donné. Malgré la complexité de la matrice à construire (liée en partie à la prise en compte de la symétrie hermitienne de la transformée de Fourier d’une fonction réelle), ceci a un avantage : mis à part le cas où l’opérateur d’advection implique une dérivée verticale (figure 5.7), les blocs d’advection sont remplis seulement très partiellement, puisqu’il n’y a pas de couplage entre différents points x et x' dans la direction verticale. Lorsque le nombre de points dans cette direction est important, il devient intéressant d’utiliser un stockage dit *sparse*, pour lequel

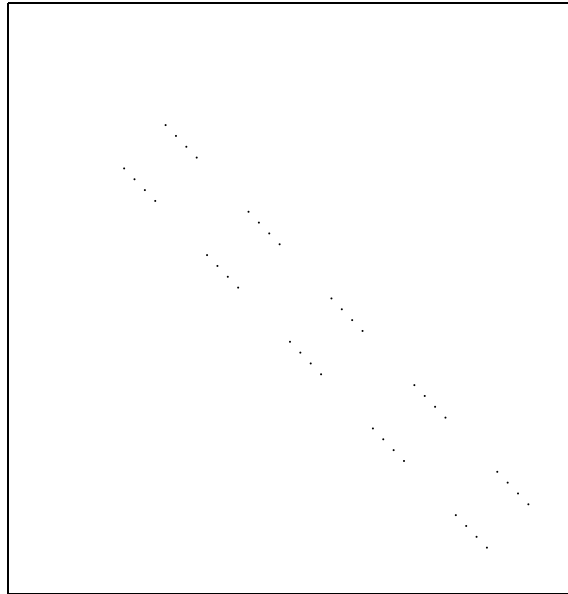


FIG. 5.5 – L'opérateur ∂_y pour $N_x = 4$, et $N_y = 10$. La composante réelle de la dérivée est calculée à partir de la composante imaginaire du champ initial. Le bloc (K_{y1}, K_{y1}) est vide puisqu'il correspond au vecteur d'onde nul. La matrice n'est pas inversible et il faut se restreindre à la résolution du système sur l'espace des fonctions à moyenne nulle dans cette direction, en imposant le bloc identité sur la composante continue (non représenté ici).

seules les coordonnées des éléments non nuls de la matrice ainsi que leur valeur sont gardées en mémoire.

5.3.d Conditions aux limites

Dans le cas de la résolution d'un système linéaire, il est nécessaire d'imposer des conditions aux limites. Le problème est éludé dans les directions périodiques horizontales en imposant des blocs identité sur les composantes continues. Dans la direction verticale, toutes les lignes de la matrice correspondant aux points 1 et N_x (s'il y a plusieurs conditions aux limites) sont remplacées par des lignes contenant l'équation des conditions aux limites.

5.3.e Algorithmes utilisés

Une fois les matrices remplies, les problèmes de résolution de systèmes linéaires peuvent être traités par deux méthodes. La première est une méthode directe basée sur le paquet LAPACK, qui nécessite le passage en argument de la totalité de la matrice. Elle est donc restreinte aux problèmes de petite taille. La seconde méthode utilise le paquet UMFPACK, qui propose une implémentation multifrontale de la résolution de systèmes linéaires pour des matrices stockées sous

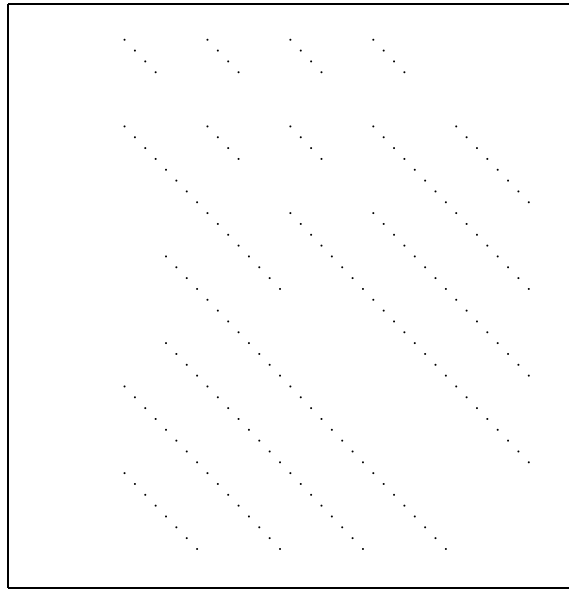


FIG. 5.6 – Représentation matricielle d'un opérateur $v(x, y)\partial_y$ pour $N_x = 4$, et $N_y = 10$. v possède des composantes sur les quatre premiers K_y , ce qui fait apparaître des couplages pour les modes $K_y \pm 1, K_y \pm 2, K_y \pm 3, K_y \pm 4$. La symétrie hermitienne de la transformée de Fourier fait que le couplage avec les modes qui ont un nombre d'onde négatif est calculé en utilisant le conjugué des modes avec un nombre d'onde positif. Tous les blocs de couplage K_y sont diagonaux par rapport à la coordonnée x , ce qui rend la matrice très creuse.

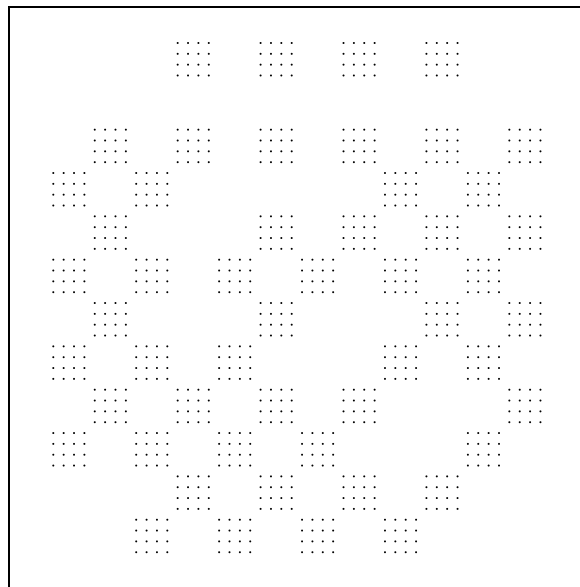


FIG. 5.7 – Une construction similaire à la précédente pour l'opérateur $v(x, y)\partial_x$. Cette fois-ci, la matrice est nettement plus remplie en raison de la présence d'une dérivée verticale.

forme *sparse*. Après avoir validé cette deuxième méthode par des tests comparatifs avec LAPACK à basse résolution, nous avons principalement utilisé celle-ci, car elle permet d'accéder à des résolutions plus importantes (en raison du mode de stockage) et offre des temps de calcul plus petits que LAPACK. Pour traiter des problèmes plus complexes comme ceux évoqués au paragraphe 5.2.c, il sera certainement nécessaire d'utiliser un algorithme de type décomposition en valeurs singulières.

5.4 Calculs de viscosités turbulentes dans des écoulements simples

Le code a pour commencer été testé en procédant à des résolutions de systèmes simples et à des multiplications dans toutes les directions, afin de valider le constructeur de matrices. Une fois ces tests réussis, nous nous sommes attaqués au problème concret du calcul de viscosités turbulentes pour trois écoulements bidimensionnels, à savoir l'écoulement de Kolmogorov, l'écoulement hexagonal simple et l'écoulement hexagonal décoré. Nous n'avons malheureusement pas eu le temps d'aller plus loin.

5.4.a Écoulement de Kolmogorov

L'écoulement de Kolmogorov (figure 5.8) est le premier écoulement pour lequel une viscosité turbulente négative a été trouvée (Meshalkin et Sinai 1961, Sivashinsky 1985). Sa fonction de courant ψ est

$$\psi(y, z) = \cos z. \quad (5.26)$$

À faible nombre de Reynolds ($Re = 1/\nu$ ici), la viscosité turbulente peut être déterminée perturbativement. Elle vaut

$$\nu_T = \nu - \frac{1}{2\nu} \quad (5.27)$$

Une instabilité à grande échelle doit donc être observée pour $Re > \sqrt{2}$. Ce comportement est illustré sur la figure 5.9, réalisée à partir des résultats obtenus à l'aide de notre programme.

5.4.b Écoulement hexagonal simple

Il n'est en général pas possible d'obtenir une expression analytique explicite pour la viscosité turbulente, à part dans des cas très simples comme celui de l'écoulement de Kolmogorov. L'écoulement hexagonal simple (figure 5.10) est un exemple d'écoulement isotrope plus compliqué, dont la fonction de courant est

$$\psi(y, z) = \cos(y - \sqrt{3}z) + \cos(y + \sqrt{3}z) + \cos 2y. \quad (5.28)$$

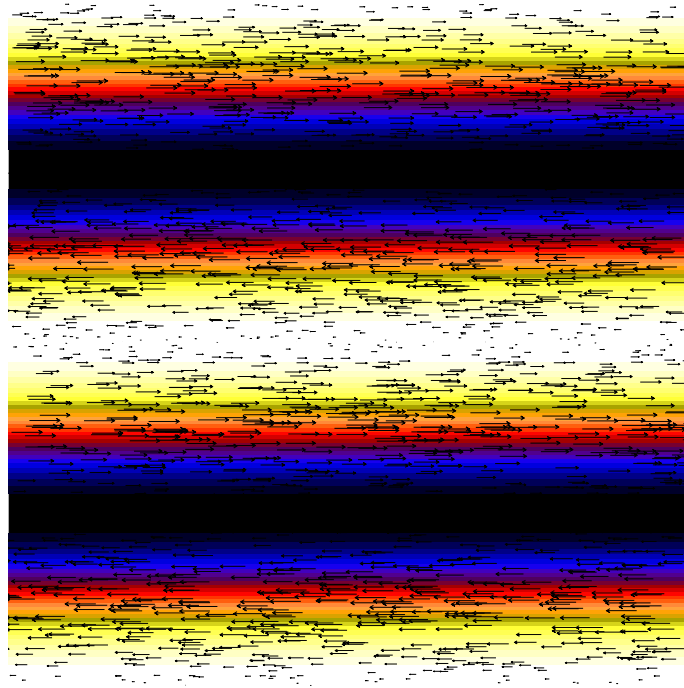


FIG. 5.8 – Champ de vitesse et carte de la vorticité pour l'écoulement de Kolmogorov. L'écoulement est périodique dans la direction z (verticale de la feuille) et infini dans la direction y .

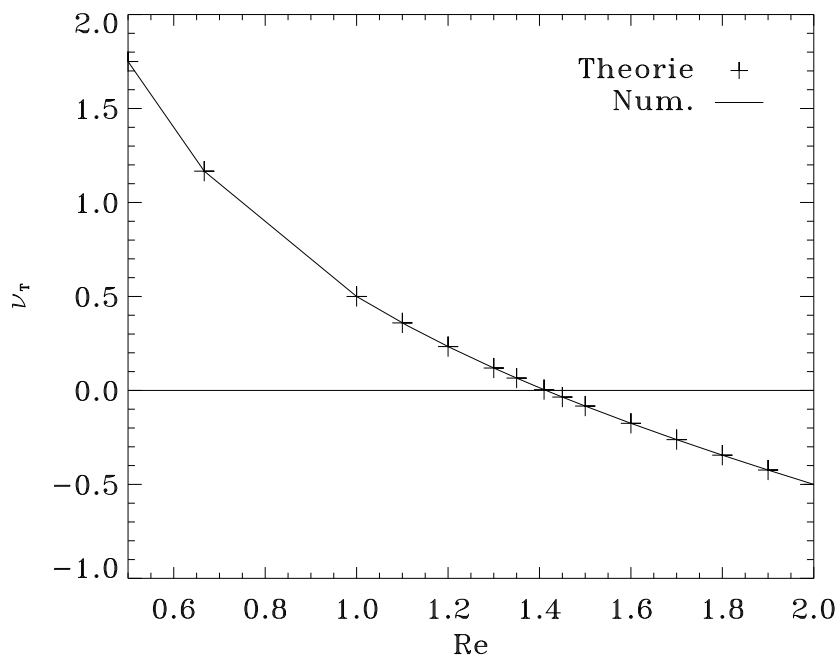


FIG. 5.9 – Calcul numérique de la viscosité turbulente de l'écoulement de Kolmogorov en fonction du nombre de Reynolds (16 modes ont été utilisés).

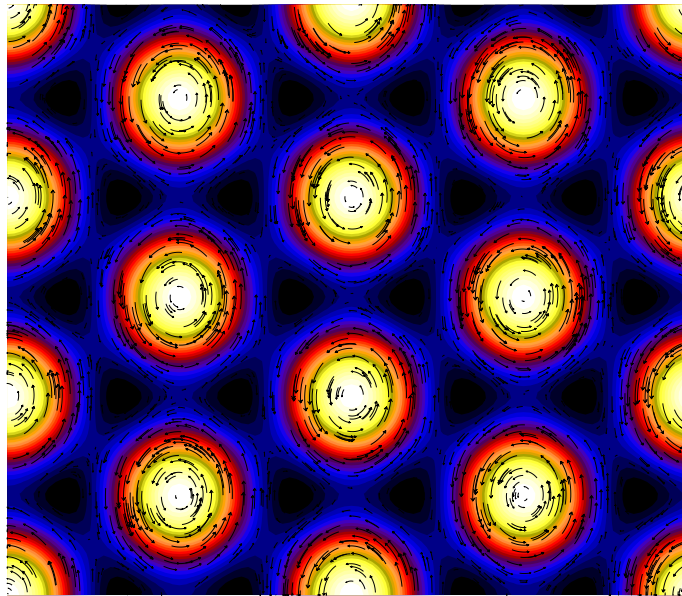


FIG. 5.10 – Champ de vitesse et carte de la vorticité pour l'écoulement hexagonal simple. L'écoulement est périodique dans les deux directions.

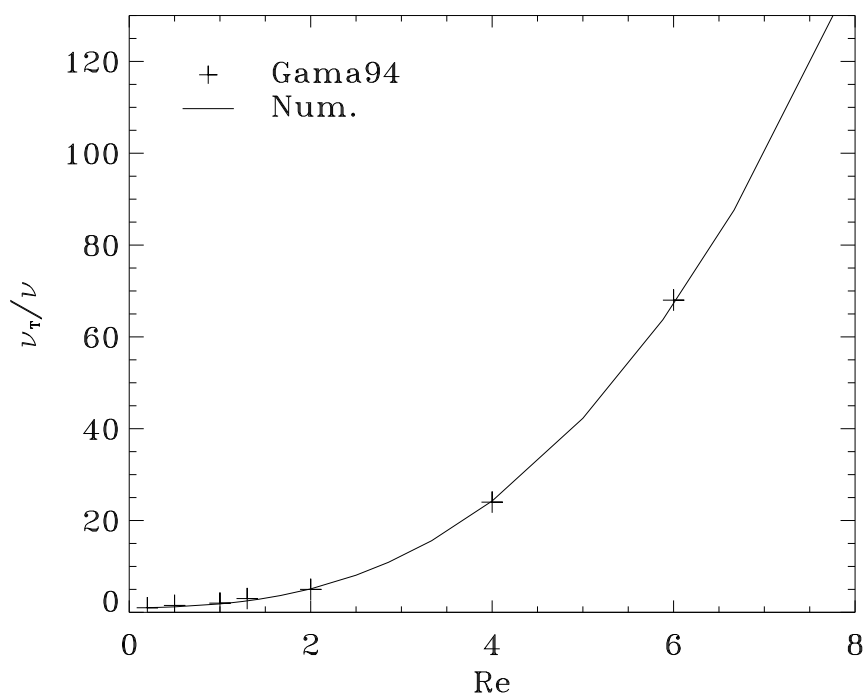


FIG. 5.11 – Calcul numérique de la viscosité turbulente (équation (5.29)) de l'écoulement hexagonal simple en fonction du nombre de Reynolds. Celle-ci est toujours positive (résultat identique à la figure 2 de l'article de Gama et al. (1994)). Une résolution 16×16 suffit pour assurer la convergence des résultats.

La viscosité turbulente de cet écoulement est toujours positive et a été calculée par Gama et al. (1994). Le passage du formalisme de Dubrulle et Frisch (1991) à celui de Gama et al. (1994) est donné par

$$\nu_T = \nu_{2112} = \nu_{1221} = \frac{1}{2} (\nu_{1111} + \nu_{2222} - \nu_{2211} - \nu_{1212} - \nu_{2121}) \quad (5.29)$$

où l'indice 1 correspond à la direction y et l'indice 2 à la direction z . En particulier, si la viscosité turbulente est isotrope, on doit avoir

$$\nu_{1121} + \nu_{1211} - \nu_{1222} - \nu_{2221} = \nu_{2212} + \nu_{2122} - \nu_{2111} - \nu_{1112} = 0. \quad (5.30)$$

Nous avons là aussi réussi à retrouver ces résultats (figure 5.11) avec le code, ce qui a permis de valider une bonne partie de la construction numérique des matrices

5.4.c Écoulement hexagonal décoré

Les écoulements possédant un seul vecteur d'onde (au sens d'une norme unique), comme l'écoulement hexagonal simple, ont des viscosités turbulentes positives. Gama et al. (1994) ont donc apporté des modifications à l'écoulement hexagonal simple pour tenter d'obtenir des viscosités turbulentes négatives. L'écoulement hexagonal décoré (figure 5.12) possède cette propriété. C'est également un écoulement isotrope, dont la fonction de courant est donnée par

$$\begin{aligned} \psi(y, z) = & -\frac{1}{2} \left[\cos 2y + \cos (y + \sqrt{3}z) + \cos (y - \sqrt{3}z) \right] \\ & + \frac{1}{2} \left[\cos (4y + 2\sqrt{3}z) + \cos (5y - \sqrt{3}z) + \cos (y - 3\sqrt{3}z) \right] \\ & - \frac{1}{2} \left[\cos 4y + \cos (2y + 2\sqrt{3}z) + \cos (2y - 2\sqrt{3}z) \right] \\ & + \frac{1}{2} \left(\cos (4y - 2\sqrt{3}z) + \cos (5y + \sqrt{3}z) + \cos (y + 3\sqrt{3}z) \right) . \end{aligned} \quad (5.31)$$

Il est particulièrement intéressant pour tester le code car il possède plusieurs composantes de Fourier, ce qui permet de voir si les blocs matriciels pour l'advection ont été correctement calculés. Les résultats obtenus sont tout à fait corrects, comme le montrent la figure 5.13 et le tableau 5.1, qui correspondent parfaitement aux résultats donnés par Gama et al. (1994) dans leur tableau 3.

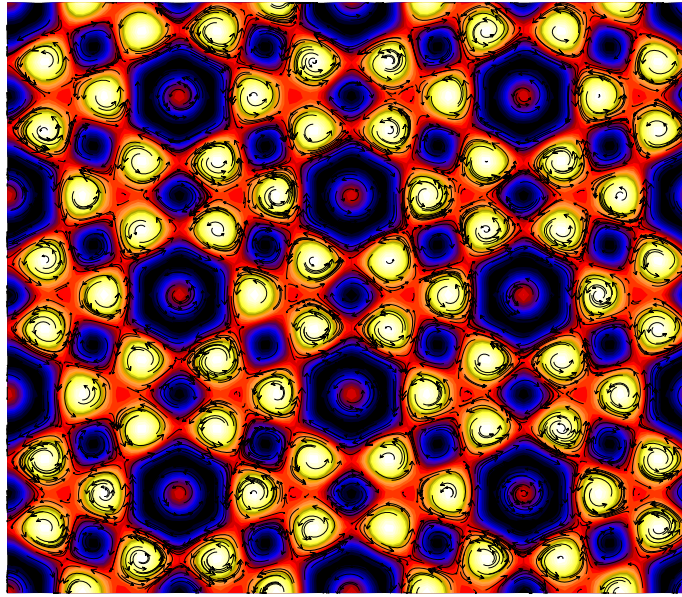


FIG. 5.12 – Champ de vitesse et carte de la vorticité pour l'écoulement hexagonal décoré. L'écoulement est périodique dans les deux directions.

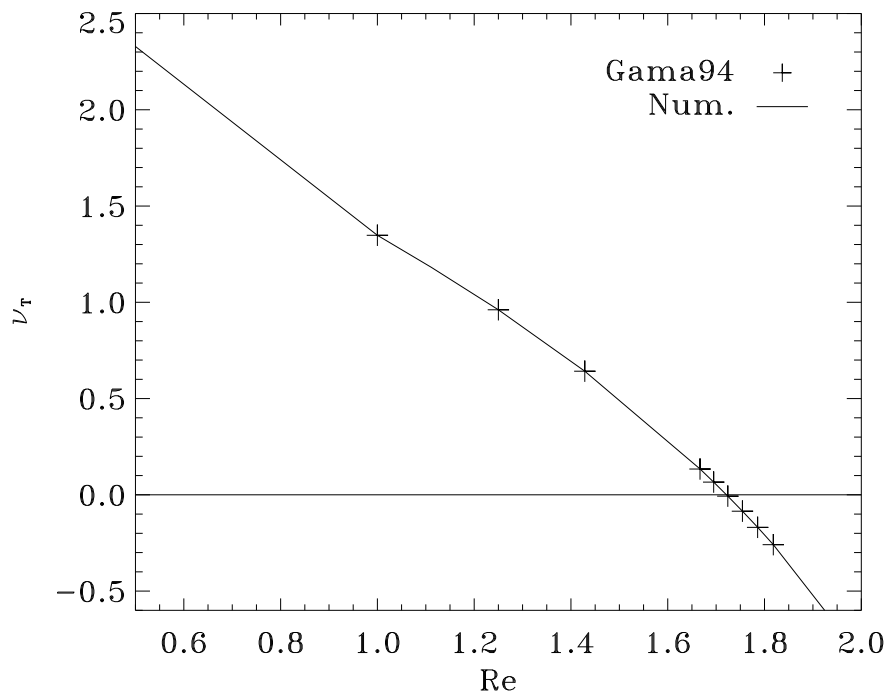


FIG. 5.13 – Viscosité turbulente de l'écoulement hexagonal décoré en fonction du nombre de Reynolds. On observe une transition $\nu_T < 0$ et donc une instabilité à grande échelle lorsque le nombre de Reynolds de l'écoulement augmente. La convergence des résultats pour cet écoulement est assurée avec 32×32 modes.

| Coefficient | Valeur |
|--------------|-----------|
| ν_{1111} | 2.250099 |
| ν_{2111} | 0.677645 |
| ν_{1112} | -1.025665 |
| ν_{2112} | 1.348196 |
| ν_{1121} | -0.329628 |
| ν_{2121} | 0.348196 |
| ν_{1122} | 0.553705 |
| ν_{2122} | -0.677647 |
| ν_{1211} | 0.677645 |
| ν_{2211} | 0.553706 |
| ν_{1212} | 0.348196 |
| ν_{2212} | 0.329628 |
| ν_{1221} | 1.348196 |
| ν_{2221} | 1.025664 |
| ν_{1222} | -0.677647 |
| ν_{2222} | 2.250095 |

TAB. 5.1 – Coefficients du tenseur de viscosité turbulente donné par l'équation (5.21) pour l'écoulement hexagonal décoré et $\nu = 1/\text{Re} = 1$. Pour cette valeur de Re , $\nu_T = \nu_{2112} = \nu_{1221}$ est positif. On peut également montrer que la viscosité de cet écoulement est isotrope, la relation (5.30) étant vérifiée.

5.5 Conclusions

Nous avons consacré ce chapitre à la présentation d'une approche alternative aux simulations numériques directes pour résoudre les problèmes de transport turbulent et de modélisation des petites échelles dans les écoulements turbulents. Pour aborder ce problème, un code basé sur le formalisme de la théorie de la viscosité turbulente, développé par Dubrulle et Frisch (1991), a été mis au point. Il a jusqu'à présent permis de retrouver les résultats obtenus par Gama et al. (1994) pour des écoulements bidimensionnels. Il est à noter que ces auteurs n'avaient pas utilisé *stricto sensu* le même formalisme que Dubrulle et Frisch (1991) et que leur méthode numérique était différente de la nôtre. Nos tests confirment donc rigoureusement l'expression (5.21) de Dubrulle et Frisch (1991) ainsi que les résultats (dans le domaine linéaire) de Gama et al. (1994).

Comme nous l'avons évoqué précédemment, l'étape suivante consistera à généraliser la théorie à des écoulements tridimensionnels non périodiques comme la convection entre deux plaques, pour lesquels la solution des problèmes adjoints posés par l'utilisation de développements asymptotiques est non triviale. Pour cela, les travaux de Cross et Newell (1984) et Newell et al. (1990) devraient

être d'une grande utilité. Une fois cette étape franchie, des résultats devraient pouvoir être obtenus pour des écoulements à petite échelle plus complexes, issus par exemple de simulations numériques directes de convection de rapport d'aspect 1. Nous avons en particulier déjà intégré la présence d'une direction anisotrope dans les configurations réalisables numériquement, ce qui devrait faciliter la recherche des solutions.

Un commentaire final sur la nature du problème à résoudre peut être fait au regard de la théorie présentée ici. Lorsque le nombre de Reynolds augmente, les écoulements de base peuvent devenir instables à petite échelle. Ces instabilités se développent sur des temps beaucoup plus courts qu'une instabilité à grande échelle de type viscosité turbulente négative. Il est donc possible qu'une instabilité lente n'ait pas vraiment de sens lorsque le nombre de Reynolds est très élevé, comme c'est le cas pour la granulation. Néanmoins, l'observation de la surface solaire nous montre que le motif de la granulation est présent à tous les temps et que son comportement est plutôt « calme » en raison de la petitesse du nombre de Peclet, qui la rend thermiquement laminaire. Il n'est donc pas insensé de penser pouvoir espérer parvenir à des résultats intéressants pour la convection solaire en utilisant des théories établies pour des nombres de Reynolds modérés. Le transport turbulent garde dans tous les cas une légitimité physique, puisque ses effets sont observés à la surface solaire (par exemple, il facilite la diffusion du champ magnétique à grande échelle). Le problème essentiel reste donc, comme nous l'avons vu, de parvenir à le formaliser dans ce contexte.

Il reste bien sûr beaucoup de travail à effectuer avant d'espérer pouvoir obtenir des résultats intéressants pour les grandes échelles de la convection solaire et plus généralement pour le problème du transport turbulent en astrophysique. Il était nécessaire de commencer par des problèmes simples afin de parvenir à réaliser une construction numérique du formalisme théorique actuel de la viscosité turbulente, ce que nous avons tenté de faire ici.

