Chapitre 2 Équations MHD dans un milieu fortement stratifié

2.1 Introduction

Les équations avec lesquelles nous avons choisi de travailler dans la perspective de cette thèse sont essentiellement celles utilisées par les groupes de Cambridge (Matthews et al. 1995, Tao et al. 1998, Rucklidge et al. 2002), de Chicago (Malagoli et al. 1990, Cattaneo et al. 1991) et de Boulder (Hurlburt et al. 1984). L'incorporation de transfert radiatif et d'équations d'état réalistes comme dans le travail de Stein et Nordlund (1998) ajoute en effet une complexité supplémentaire à l'ensemble des développements, en particulier numériques, qui aurait été difficile à gérer dans une période aussi courte que celle d'une thèse. Nous espérons bien sûr en faisant ces hypothèses simplificatrices qu'elles n'ont pas une incidence trop grande sur les phénomènes que nous souhaitons mettre en évidence et que l'essentiel de la dynamique des grandes échelles dans les photosphères d'étoiles de type solaire peut être capturé sans ces ingrédients. L'incorporation d'éléments comme le transfert radiatif constitue bien évidemment un objectif intéressant à plus long terme pour raffiner des modèles obtenus avec des hypothèses physiques plus simples.

2.2 Système physique étudié

Dans l'ensemble des calculs, les variables $\boldsymbol{v}$ pour le champ de vitesse, $\boldsymbol{B}$ pour le champ magnétique, T pour la température, ρ pour la densité et p pour la pression sont utilisées.

2.2.a Cadre général

On considère une atmosphère plan-parallèle constituée de gaz parfait, comprise entre $z = 0$ (bas de la couche) et $z = d$, où z repère l'altitude, tandis que x et y sont les coordonnées dans les directions horizontales. On s'intéressera plus particulièrement à l'atmosphère isotherme, pour laquelle $T = T_o = C^{\mathrm{te}}$ au repos, et à des polytropes pour lesquels une différence de température ΔT est établie initialement entre le haut et le bas de l'atmosphère. L'index adiabatique du gaz, noté γ, vaut 5/3 dans ce manuscrit. La constante des gaz parfait est notée $\mathcal{R}$. c_p et c_v sont les capacités calorifiques à pression ou volume constant. La gravité, $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_z$, est supposée constante sur l'épaisseur de la couche et les perturbations du potentiel gravitationnel induites par l'écoulement sont négligées. La viscosité dynamique μ, la conductivité thermique χ, et la diffusivité magnétique η sont supposées constantes. La viscosité cinématique $\nu = \mu/\rho$ et la diffusivité thermique $\kappa = \chi/(\rho\, c_p)$, sont donc proportionnelles à l'inverse de la densité $1/\rho$.

2.2.b Paramètres caractéristiques

Dans ce qui suit, un indice $_\mathrm{b}$ caractérise des quantités physiques évaluées au bas de la couche et un indice $_\mathrm{t}$ les mêmes quantités évaluées en haut. On utilise pour adimensionaliser les équations d comme unité de distance (l'altitude sans dimension va donc de 0 à 1), d^2/κ_b comme unité de temps, une température caractéristique du problème T_car comme unité de température. ρ_b est choisie comme unité de densité, B_o, l'intensité du champ magnétique initial, comme unité de champ magnétique. Les paramètres suivants apparaissent alors naturellement dans les équations (les notations sont les mêmes que dans Depassier et Spiegel (1981) et Chandrasekhar (1961) pour le champ magnétique) :

- le nombre de Chandrasekhar $Q = \left(B_o^2 d^2\right) / (\mu_o \mu \eta)$;
- la gravité adimensionalisée $\Lambda = \left(g d^3\right) / \kappa_\mathrm{b}^2$;
- le nombre de Prandtl thermique $\mathrm{Pr} = \mu / \left(\rho_\mathrm{b} \kappa_\mathrm{b}\right)$;
- le nombre de Prandtl magnétique $\mathrm{Pr_m} = \mu / \left(\rho_\mathrm{b} \eta\right)$;
- une estimation du « nombre de Mach thermique » de la couche

$$C_\mathrm{k} = \sqrt{\gamma \kappa_\mathrm{b}^2 / \left(d^2 c_\mathrm{s}^2\right)} = \sqrt{\gamma} M_{th}, \text{ avec } c_\mathrm{s}^2 = \gamma\, \mathcal{R} T_\mathrm{car} .$$

2.3 Équations sans dimension

Les paramètres précédents permettent d'obtenir les équations MHD directement dans une forme sans dimension (voir par exemple Cattaneo et al. 1991). Nous utilisons des notations identiques pour les variables sans dimensions. À partir de ce paragraphe, nous travaillerons toujours avec des équations sans dimensions.

Équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0\,. \tag{2.1}$$

Équation pour la vitesse :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla}\, \boldsymbol{v} &= -\frac{1}{\mathrm{C_k^2}} \left(T\, \boldsymbol{\nabla} \ln \rho + \boldsymbol{\nabla} T\right) + Q \frac{\mathrm{Pr}^2}{\rho \mathrm{Pr_m}} \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} - \Lambda\, \boldsymbol{e}_z \\ &+ \frac{\mathrm{Pr}}{\rho} \Delta \boldsymbol{v} + \frac{1}{3} \frac{\mathrm{Pr}}{\rho} \boldsymbol{\nabla} \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}\right)\,. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Équation sur la température :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla}\, T + (\gamma - 1)\, T\, \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\gamma}{\rho} \Delta T + (\gamma - 1)\, \mathrm{C_k^2} \frac{\mathrm{Pr}}{\rho} \left(\mathcal{V} + Q \left(\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pr_m}}\right)^2 |\boldsymbol{j}|^2 \right)\,. \tag{2.3}$$

Équation d'induction :

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) + \frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pr_m}} \Delta \boldsymbol{B}\,. \tag{2.4}$$

$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \left(\partial_i v_j + \partial_j v_i - \frac{2}{3} (\partial_k v_k) \delta_{ij}\right)^2 = \partial_j v_i \left(\partial_j v_i + \partial_i v_j - \frac{2}{3}\, \delta_{ij} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}\right)$ est la dissipation visqueuse au sein de la couche, et $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}$ est la densité de courant électrique. Enfin, nous adoptons l'équation d'état d'un gaz parfait :

$$p = \frac{\Lambda}{m+1} \rho T\,, \tag{2.5}$$

avec $m + 1 = gd/\mathcal{R}T_{\mathrm{car}}$.

2.4 Différents équilibres hydrostatiques

Si on note avec l'indice $_{\mathrm{s}}$ les profils verticaux statiques, on a

$$\frac{\partial p_s}{\partial z} = -\Lambda \rho_s \,, \tag{2.6}$$

et l'équation de la température se résume à un flux conductif vertical constant

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \,. \tag{2.7}$$

2.4.a Les polytropes

On caractérise un polytrope par deux paramètres, la température en haut de la couche $z_o = T_o/\Delta T$ et l'index polytropique $m = gd/\mathcal{R}\Delta T - 1$ (ΔT, la différence de température entre le haut et le bas de la couche, fait ici office de température caractéristique). Les profils de température, de densité, et de pression pour un polytrope s'écrivent

$$\begin{aligned} T_s(z) &= z_o + 1 - z \,, \\ \rho_s(z) &= \left(\frac{z_o + 1 - z}{z_o + 1}\right)^m \,, \\ p_s(z) &= \frac{\Lambda\,(z_o + 1)}{(m+1)} \left(\frac{z_o + 1 - z}{z_o + 1}\right)^{m+1} \,. \end{aligned} \tag{2.8}$$

On remarquera que les faibles valeurs de z_o correspondent à des milieux fortement stratifiés, tandis que la limite $z_o \to +\infty$ se ramène à faire l'approximation de Boussinesq (Chandrasekhar 1961).

2.4.b L'atmosphère isotherme

Dans le cas de l'atmosphère isotherme, l'équation (2.5) permet d'obtenir directement les profils statiques de pression et de densité

$$\begin{aligned} T_s &= 1 \,, \\ \rho_s(z) &= \exp[-z/H] \,, \\ p_s(z) &= \Lambda\, H \exp[-z/H] \,, \end{aligned} \tag{2.9}$$

avec $H = 1/(m+1) = \mathcal{R}T_o/(g\,d)$.

2.4.c Échelles de hauteur, temps caractéristiques

La correspondance entre l'échelle de hauteur de densité adimensionalisée H et « l'index polytropique » pour les deux configurations hydrostatiques précédentes est donnée par $m + 1 = 1/H$. Dans la limite d'un milieu non stratifié, $H \to +\infty$, et par conséquent $m \to -1$. Notons également que H, C_k et Λ ne sont pas indépendants, puisque

$$H = 1/(C_k^2 \Lambda) \, . \tag{2.10}$$

Les temps caractéristiques du système sont alors complètement fixés par rapport au temps de relaxation thermique en imposant par exemple Λ et H (ou m).

– $\tau_{cl} = \sqrt{d/g} = 1/\sqrt{\Lambda}$ (temps de chute libre) ;

– $C_k = 1/\sqrt{\Lambda H} = \sqrt{(m+1)/\Lambda}$ (propagation verticale d'une onde sonore).

2.5 Conditions aux limites

Les problèmes de mécanique des fluides, et de physique plus généralement, seraient certainement beaucoup moins difficiles (mais également moins intéressants) à résoudre si des conditions aux limites n'avaient pas lieu d'être. Celles-ci jouent un rôle essentiel dans la sélection des solutions générales des équations, que ce soit dans la théorie linéaire ou dans le cas complètement turbulent. Notons en particulier que leur implémentation pratique dans un code de simulation peut être une source majeure de problèmes. Nous décrivons donc ici l'ensemble des conditions aux limites « idéalisées » qu'il est possible d'associer au problème.

Dans la direction horizontale, le choix de conditions aux limites périodiques se fait naturellement, que ce soit pour des simulations en géométrie sphérique ou cartésienne. De telles conditions se prêtent en effet mieux à l'étude de milieux plan-parallèles infinis que des conditions de type mur, plus caractéristiques de simulations d'expériences de laboratoire.

En ce qui concerne la direction verticale, des conditions de type stress-free ou rigides pour la vitesse peuvent être adoptées. On pourrait aussi envisager des conditions de type frontière ouverte, avec l'existence d'un flux de masse non nul localement mais nul globalement. La mise en place de telles conditions est cependant plus délicate.

Pour la variable de température, des conditions de température fixée ou de flux de chaleur fixé sont la norme. Enfin, des conditions de type isolant ou conducteur sont souvent utilisées pour les champs magnétiques (Hurlburt et al. 1989, Matthews et al. 1995, Rucklidge et al. 2002). Selon les problèmes, des conditions aux limites sur la densité peuvent être requises, mais ce n'est pas le cas par exemple pour des simulations de convection, pour lesquelles le système se comporte bien (en croisant les doigts) en fixant juste des conditions sur le champ de vitesse et la température.

On peut finalement remarquer que les conditions aux limites évoquées ci-dessus sont toutes du type « dérivée fixée » ou « champ fixé », c'est-à-dire que pour toutes les variables f sur lesquelles des conditions aux limites sont requises, on peut mettre celles-ci sous la forme $f = cl(x,y)$ ou $\partial_z f = cl(x,y)$ en $z = 0$ ou

$z = 1$. Cette remarque est importante pour le choix des schémas de bords utilisés par les méthodes numériques de différentiation spatiale.

2.6 Définitions diverses et variées

Pour finir ce chapitre, nous définissons diverses quantités caractérisant la physique des écoulements de convection turbulente.

2.6.a Nombre de Rayleigh

Il n'est pas possible en milieu compressible de définir un nombre de Rayleigh identique en tout point de la couche, mais il est commode de raisonner avec le nombre de Rayleigh défini au milieu de la couche

$$\mathrm{R} = \left(\frac{1/2 + z_o}{1 + z_o}\right)^{2m-1} \frac{\Lambda}{\mathrm{Pr}\,(1 + z_o)} \frac{(1 + m - \gamma m)}{\gamma} \,. \tag{2.11}$$

dont la définition rejoint celle utilisée habituellement dans l'approximation de Boussinesq, lorsque $z_o \to +\infty$.

2.6.b Équation pour l'énergie

Au-delà du système d'équations décrit précédemment, il est intéressant de considérer l'équation de conservation de l'énergie, et de définir les divers flux au travers de la couche, en utilisant le système d'unités choisi. L'équation-bilan est la suivante (*e. g.* Roberts 1967) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(e + \frac{v^2}{2}\right) + \frac{Q\mathrm{Pr}^2}{\mathrm{Pr_m}}\frac{B^2}{2}\right] &= -\boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\rho \boldsymbol{v}\left(e + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \phi\right)\right] \\ &\quad -\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\boldsymbol{F}_{\mathrm{poynt}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{visc}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{cond}}\right), \end{aligned} \tag{2.12}$$

où $e = \Lambda T / \left((\gamma - 1)(m + 1)\right)$, $\phi = \Lambda z$ sont l'énergie interne et l'énergie potentielle par unité de masse, et

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_{\mathrm{poynt}} &= \frac{Q\,\mathrm{Pr}^2}{\mathrm{Pr_m}}\left(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\right), \\ F_{\mathrm{visc},i} &= -\mathrm{Pr}\left(v_j\,\tau_{ij}\right), \\ \boldsymbol{F}_{\mathrm{cond}} &= -\frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{\Lambda}{m + 1}\boldsymbol{\nabla} T\,, \end{aligned} \tag{2.13}$$

sont respectivement les flux de Poynting ($\boldsymbol{E}$ est le champ électrique), visqueux et conductif. On définit également les flux d'énergie cinétique, d'enthalpie, et le flux convectif total par

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_{\text{cin}} &= \frac{\rho\, v^2\, \boldsymbol{v}}{2}\,, \\
\boldsymbol{F}_{\text{ent}} &= \rho\, (e + p/\rho)\, \boldsymbol{v} \;=\; \frac{\gamma}{\gamma-1}\, \frac{\Lambda}{m+1}\, \rho\, T\, \boldsymbol{v}\,, \\
\boldsymbol{F}_{\text{conv}} &= \boldsymbol{F}_{\text{ent}} + \boldsymbol{F}_{\text{cin}}\,.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

On a utilisé $p/\rho = T/C_{\text{k}}^2 = \Lambda\, T/(m+1)$. Si on moyenne l'équation (2.12) sur les coordonnées horizontales (les moyennes horizontales sont notées par un surlignage), et en supposant la périodicité des différents champs dans ces directions, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\overline{\rho\left(e + \frac{v^2}{2}\right)} + \overline{\frac{Q\,\mathrm{Pr}^2}{\mathrm{Pr}_{\text{m}}}\frac{B^2}{2}}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{F}_{\text{conv}} + \overline{F}_{\text{cond}} + \overline{F}_{\text{visc}} + \overline{F}_{\text{poynt}}\right) = 0\,, \tag{2.15}$$

Notons que la relation (2.15) peut servir de vérification lors de la construction d'un code de simulation.

2.6.c Nombre de Nusselt

Si le profil thermodynamique moyen est adiabatique ($p \propto \rho^{\gamma}$), on montre en utilisant l'équation (2.6) que le gradient de température vertical est

$$\nabla_{\text{ad}} = -\frac{(\gamma-1)(m+1)}{\gamma}\,, \tag{2.16}$$

auquel correspond un flux *conductif* vertical $F_{\text{ad}} = \Lambda$. Par conséquent, dans une telle configuration, il est possible de quantifier quelle fraction du flux d'énergie total F_{tot} n'est pas liée à la conduction, par l'intermédiaire de $F_{\text{tot}} - F_{\text{ad}}$. Pour illustrer ceci, on peut prendre une situation extrêmement turbulente, pour laquelle le profil est quasi-adiabatique loin des bords grâce au mélange convectif. Dans ce cas, $F_{\text{tot}} - F_{\text{ad}}$ représente simplement la contribution de la convection au flux d'énergie. Le nombre de Nusselt mesure alors l'efficacité de la convection :

$$\mathrm{Nu} = \frac{F_{\text{tot}} - F_{\text{ad}}}{F_{\text{ref}} - F_{\text{ad}}}\,. \tag{2.17}$$

où F_{ref} est le flux (fictif) qui serait transporté par conduction pour une différence de température linéaire calculée à partir des températures réelles des deux parois. Le nombre de Nusselt tend vers 1 lorsque la convection est absente et vers l'infini lorsque le transport d'énergie s'effectue efficacement par convection (notons que pour un milieu fortement stratifié un flux conductif F_{ad} important est cependant toujours présent). En imposant des conditions aux limites sur la température aux extrémités de la couche, on génère dans le cas très turbulent des couches limites thermiques dans lesquelles l'essentiel du flux est conductif, alors qu'il est complètement convectif loin des bords. Le nombre de Nusselt est donc important en dehors des couches limites thermiques au niveau des parois.